FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

Palchetto

Num.° d' ordine

NAZIONALE

B. Prov.

VITT. EM. III

2592

NAPOLI

B. Prov
I
2592

C0882/12

NOUVEAUX ELEMENS D'ALGEBRE,

OU

PRINCIPES GENERAUX,

Pour resoudre toutes sortes de Problêmes

DE

MATHEMATIQUE.

Par M. OZANAM Professeur des Mathematiques.

SECONDE PARTIE.

BIBLIOTECA PROVINCIALE NAPOLI

A AMSTERDAM,
Chez GEORGE GALLET.

M. DCCII.

B. BIBLIOTECA

TABLE

Des Chapitres, & matieres contenuës dans ces nouveaux Elemens d'Algebre.

SECONDE PARTIE.

LIVRE TROISIE'ME.

Des Problêmes d'Arithmetique. 273

CHAP. I. *Des Problêmes Déterminez.* ibid.

Sect. I. *Des Problêmes simples.* 274

Probl. I. *Trouver deux nombres, dont la somme, & la difference soient égales à des nombres donnez.* ibid.

Probl. II. *Trouver trois nombres égaux, tels que leur somme, la somme du plus grand & du moyen, & la somme du moyen, & du plus petit, soient égales à des nombres donnez.* 278

Probl. III. *Trouver trois nombres, tels que la somme de deux quelconques soit égale à un nombre donné.* 280

Probl. IV. *Trouver les côtez d'un triangle rectiligne, dont on connoît les Angles, & le contour.* 282

Probl. V. *Trouver deux nombres tels que chacun avec ses parties aliquotes fasse une même somme.* 284

Probl. VI. *Trouver deux nombres, tels que la somme des parties aliquotes du premier surpasse la somme des parties aliquotes du second d'un nombre quarré.* 288

Probl. VII. *Trouver un nombre qui ſoit égal à la ſomme de ſes parties aliquotes.* 290

Probl. VIII. *Trouver deux nombres, dont chacun ſoit égal à la ſomme des parties aliquotes de l'autre.* 292

Probl. IX. *Trouver en nombres les hauteurs de deux Parallelepipedes rectangles, dont les longueurs & les largeurs ſont données auſſi en nombres, en ſorte que la ſomme de leurs ſoliditez ſoit égale à la ſomme de leurs baſes, & la difference des mêmes ſoliditez égale à la difference de leurs hauteurs.* 293

Probl. X. *Trouver deux nombres, dont la ſomme ſoit égale à un nombre donné, & dont la raiſon ſoit égale à celle de deux nombres donnez.* 295

Probl. XI. *Trouver la monnoye d'un écu valant 60 ſols en liards & en ſols marquez valant 4 liards, en ſorte qu'il y ait autant de liards que de ſols marquez.* 296

Probl. XII. *Trouver deux nombres tels que ſi l'on en donne 3 du ſecond au premier, la ſomme ſoit égale au reſte: & que ſi l'on en donne 3 du premier au ſecond, la ſomme ſoit double du reſte.* ibid.

Probl. XIII. *Trouver quatre nombres en continuelle proportion arithmetique, dont on connoît l'excès & la ſomme.* 297

Sect. II. *Des Problêmes Plans.* 298

Probl. I. *Trouver deux nombres, dont la ſomme ſoit égale à un nombre donné, & dont le produit ſoit égal à la difference de leurs quarrez.* 299

Probl. II. *Trouver trois nombres en proportion Géometrique, dont les trois differences ſoient en proportion Arithmetique.* 300

Probl. III. *Trouver trois nombres en proportion harmonique, dont les trois differences ſoient en proportion Géometrique.* 301

Probl.

Probl. IV. *Trouver trois nombres en proportion Géometrique, dont les trois differences ſoient en proportion harmonique.* 302

Probl. V. *Trouver quatre nombres en continuelle proportion Arithmetique, dont l'excès & le produit Plan-plan ſoient égaux à des nombres donnez.* 303

Probl. VI. *Trouver les côtez d'un Parallelogramme rectangle, dont la Diagonale eſt connuë, & dont l'aire ſoit égale à ſon contour.* 304

Probl. VII. *Trouver trois nombres, tels que le produit des deux premiers ſoit double du troiſiéme, que le produit de deux derniers ſoit triple du premier, & que le produit des deux extrêmes ſoit quadruple du moyen.* 310

Probl. VIII. *Trouver trois nombres, tels que le produit de deux quelconques ſoit égal à un nombre donné.* 312

Probl. IX. *Trouver deux nombres, dont la ſomme & le produit ſoient égaux à des nombres donnez.* 313

Probl. X. *Trouver deux nombres, dont on connoît la ſomme, & auſſi la ſomme de leurs quarrez.* 315

Probl. XI. *Trouver deux nombres, dont la difference & le produit ſoient égaux à des nombres donnez.* 318

Probl. XII. *Trouver deux nombres, dont on connoît la difference, & la ſomme de leurs quarrez.* 319

Probl. XIII. *Trouver deux nombres, dont on connoît la ſomme, & la difference de leurs quarrez.* 321

Sect. III. *Des Problêmes ſolides.* 323

Probl. I. *Trouver deux nombres tels que le produit ſous leurs ſommes & la ſomme de leurs quarrez, & le produit ſous leur difference & la difference de leurs quarrez, ſoient égaux à des nombres donnez.* ibid.

Probl. II. *Trouver deux nombres tels que le ſolide ſous leur ſomme & la difference de leurs quarrez, & le ſolide ſous leur difference & la ſomme de leurs quarrez, ſoient égaux à des nombres donnez.* 327

Probl. III. *Trouver deux nombres, tels que le ſolide ſous leur difference & le quarré du plus grand, ſoit égal au ſolide ſous leur ſomme & le quarré du plus petit.* 330

Probl. IV. *Trouver deux nombres, tels que le produit ſolide ſous le plus grand & le quarré de leur ſomme, ſoit égal au produit ſolide ſous le plus petit & le quarré de leur ſomme.* 331

Probl. V. *Trouver trois nombres en proportion arithmetique, dont l'excès, & le produit ſolide ſoient égaux à des nombres donnez.* 332

Probl. VI. *Trouver deux nombres, tels que leur produit, & la ſomme de leurs cubes, ſoient égaux à des nombres donnez.* ibid.

Probl. VII. *Trouver deux nombres, dont le produit, & la difference de leurs cubes, ſoient égaux à des nombres donnez.* 333

Probl. VIII. *Trouver deux nombres tels que les ſolides ſous châcun, & la ſomme de leurs quarrez, ſoient égaux à des nombres donnez.* 335

Probl. IX. *Trouver deux nombres, tels que les ſolides ſous châcun & la difference de leurs quarrez, ſoient égaux à des nombres donnez.* 336

Probl. X. *Trouver deux nombres, tels que les ſolides ſous chacun & le quarré de leur ſomme, ſoient égaux à des nombres donnez.* 337

Probl. XI. *Trouver deux nombres, tels que les ſolides ſous châcun & le quarré de leur difference, ſoient égaux à des nombres donnez.* 338

Probl. XII. *Trouver deux nombres, tels que le ſolide de ces deux nombres & de leur ſomme, & le ſolide des deux mêmes nombres, & de leur difference, ſoient égaux à des nombres donnez.* 339

Probl. XIII. *Trouver deux nombres tels que le ſolide ſous leur ſomme & le quarré de leur difference, & le ſolide ſoit*

ſous leur difference & le quarré de leur ſomme ſoient égaux à des nombres donnez. 340

CHAP. II. *Des Simples, des Doubles, & des Triples Egalitez, pour la ſolution des Problêmes indéterminez en nombres rationnels.* 342

Probl. I. *Egaler au quarré une Puiſſance, où la lettre inconnuë a une dimenſion.* 344

Probl. II. *Egaler au quarré une Puiſſance, où la lettre inconnuë a deux dimenſions.* 349

Probl. III. *Egaler au quarré une Puiſſance, où la lettre inconnuë a trois dimenſions.* 362

Probl. IV. *Egaler au quarré une Puiſſance, où la lettre inconnuë a quatre dimenſions.* 368

Probl. V. *Egaler au quarré une Puiſſance, où la lettre inconnuë a plus de quatre dimenſions.* 377

Probl. VI. *Egaler au quarré une Puiſſance, où il y a pluſieurs lettres inconnuës.* 380

Probl. VII. *Egaler au quarré une Fraction.* 400

Probl. VIII. *Egaler au Cube une Puiſſance, où la lettre inconnuë a une dimenſion.* 422

Probl. IX. *Egaler au Cube une Puiſſance, où la lettre inconnuë a deux dimenſions,* 423

Probl. X. *Egaler au Cube une Puiſſance, où la lettre inconnuë a trois dimenſions.* 428

Probl. XI. *Egaler au Cube une Puiſſance, où la lettre inconnuë a plus de trois dimenſions.* 435

Probl. XII. *Egaler au Cube une Puiſſance, où il y a pluſieurs lettres inconnuës.* 438

Probl. XIII. *Egaler au Cube une Fraction.* 441

Probl. XIV. *Egaler au Quarré-quarré une Puiſſance.* 448

Queſt. I. *Trouver deux nombres, tels que la ſomme de leurs quarrez ſoit un nombre quarré.* 452

Queſt. II. *Trouver deux nombres, dont le produit re-*

cevant le quarré de chacun, produiſe deux nombres quarrez. 453

Queſt. III. *Trouver trois nombres, tels que ſi au plan de deux quelconques on ajoûte le plan ſous la ſomme de ces deux nombres & un même nombre donné il vienne trois nombres quarrez.* 454

Queſt. IV. *Trouver trois nombres quarrez, tels que ſi au Plan-plan de deux quelconques on ajoûte le Plan-plan ſous la ſomme de ces deux quarrez & un même nombre quarré donné, il vienne trois nombres quarrez.* 457

Queſt. V. *Trouver trois nombres quarrez en proportion Arithmetique.* 458

Queſt. VI. *Trouver trois nombres quarrez en proportion Harmonique.* 460

Queſt. VII. *Trouver trois nombres quarrez, tels que la ſomme de deux quelconques ſoit un nombre quarré.* 463

Queſt. VIII. *Trouver trois nombres cubiques, dont la ſomme ſoit un Cube.* 465

Queſt. IX. *Trouver trois nombres en proportion Arithmetique, tels que la ſomme de leur Cube ſoit un Cube.* 469

Queſt. X. *Trouver en nombres un triangle rectangle, tel que la ſomme des cubes de ſes trois côtez ſoit un cube.* 472

Queſt. XI. *Trouver en nombres, deux triangles rectangles de difference eſpece, où les differences des contours, des hypotenuſes, des plus grands des deux autres côtez, & des plus petits, ſoient des nombres quarrez.* 474

Lemm. I. *Trouver en nombres un triangle, tel que la difference du quadruple de ſon aire & de la difference des quarrez des deux côtez, ſoit un nombre quarré.* 475

Lemm.

Lemm. II. *Trouver en nombres un triangle rectangle, tel que la ſomme du quadruple de ſon aire & de la difference des quarrez des deux côtez, ſoit un nombre quarré.* 476

Queſt. XII. *Trouver en nombres un triangle rectangle, où la difference des deux côtez, & l'hypotenuſe ſoient des nombres quarrez.* 477

Queſt. XIII. *Trouver en nombres un triangle rectangle, où la ſomme des deux côtez, & l'hypotenuſe, ſoient des nombres quarrez.* 480

Queſt. XIV. *Trouver trois nombres, tels que leur ſomme ſoit un nombre quarré, & la ſomme de leurs quarrez un nombre quarré-quarré.* 481

Queſt. XV. *Trouver quatre nombres tels, que leur ſomme ſoit un nombre quarré, & la ſomme de leurs quarrez un nombre quarré-quarré.* 485

Lemme. 485

Queſt. XVI. *Trouver un triangle rectangle, dont l'aire étant ôtée du plus grand des deux côtez & de l'hypotenuſe, il reſte deux nombres quarrez.* 488

Queſt. XVII. *Trouver deux triangles rectangles, dont les lignes ſoient telles, que la difference des deux plus petites du premier, ſoit égale à la difference des deux plus grandes du ſecond: & que reciproquement la difference des deux plus petites du ſecond, ſoit égale à la difference des deux plus grandes du premier.* 490

Queſt. XVIII. *Trouver en nombres entiers un triangle rectangle, où la difference des deux côtez ſoit égale à nn nombre entier donné.* 492

Queſt. XIX. *Trouver un nombre cubique, lequel avec ſes parties aliquotes faſſe un nombre quarré.* 493

Queſt. XX. *Trouver un nombre quarré, duquel ſi l'on*

ôte ſes parties aliquotes, il reſte un autre nombre quarré. 494

Queſt. XXI. *Trouver un nombre quarré, duquel ſi l'on ôte ſes parties aliquotes, il reſte un nombre cubique.* ibid.

Queſt. XXII. *Trouver un quarré, auquel ſi l'on ajoûte ſes parties aliquotes, la ſomme ſoit un nombre quarré.* 495

Queſt. XXIII. *Trouver un nombre quarré tel que la ſomme de ſes parties aliquotes ſoit un nombre quarré.* 497

Queſt. XXIV. *Trouver deux nombres quarrez, dont chacun avec ſes parties aliquotes faſſe une même ſomme.* 498

Queſt. XXV. *Trouver deux nombres quarrez, dont le premier avec ſes parties aliquotes ſoit égal aux parties aliquotes du ſecond.* 503

Queſt. XXVI. *Trouver en nombres entiers un quarré, tel que ſi on le multiplie par un nombre entier donné, qui ne ſoit pas quarré, & que l'on ajoûte au produit une unité la ſomme ſoit un nombre quarré.* ibid.

Queſt. XXVII. *Trouver en nombres un triangle rectangle, tel que ſi de l'un des deux côtez on ôte le quarré de l'hypotenuſe, & reciproquement de l'hypotenuſe le quarré du même côté, il reſte deux nombres quarrez.* 517

Queſt. XXVIII. *Trouver en nombres un triangle rectangle, dont l'hypotenuſe ſoit l'aire d'un autre triangle rectangle.* 518

Queſt. XXIX. *Trouver en nombres un triangle rectangle, où l'hypotenuſe & l'un des deux côtez, ſoient chacun l'aire d'un triangle rectangle.* 520

Queſt. XXX. *Trouver en nombres un triangle rectangle, où chacun des deux côtez ſoit l'aire d'un autre triangle rectangle.* 522

Queſt.

Queſt. XXXI. *Trouver en nombres un triangle rectangle, dont chaque côté & l'hypotenuſe ſoit l'aire d'un triangle rectangle.* 524

Queſt. XXXII. *Trouver en nombres un triangle rectangle, dont chacun des deux côtez & l'hypotenuſe ſoit l'hypotenuſe d'un triangle rectangle.* 525

Queſt. XXXIII. *Trouver trois nombres triangulaires, dont la ſomme ſoit un nombre triangulaire.* 528

Queſt. XXXIV. *Trouver en nombres un triangle obliquangle, dont les trois côtez & l'aire ſoient exprimez par des nombres rationnels.* 533

Queſt. XXXV. *Trouver en nombres le triangle ABC, dont les trois côtez AB, AC, BC, la perpendiculaire BD, & les ſegmens AD, CD, ſoient exprimez par des nombres rationnels : & de plus que la perpendiculaire BD, & les trois côtez BC, AC, AB, ſoient dans une continuelle proportion arithmetique.* 535

Queſt. XXXVI. *Trouver en nombres un triangle ABC, dont les trois côtez AB, AC, BC, la perpendiculaire BD, la droite BE, qui diviſe l'angle ABC, en deux également, & tous les ſegmens de la baſe AC, ſoient exprimez par des nombres rationnels.* 537

Queſt. XXXVII. *Trouver en nombres un Quadrilatere dans un cercle, dont les quatre côtez & les deux diagonales ſoient exprimées par des nombres rationnels.* 541

Queſt. XXXVIII. *Trouver en nombres un Quadrilatere dans un cercle, dont l'aire & les quatre côtez ſoient exprimez par des nombres rationnels.* 547

Queſt. XXXIX. *Trouver deux nombres quarrez, dont la*

la difference ſoit égale à un nombre donné. 550
Des Doubles Egalitez. 552
Probl. I. *Reſoudre une Double Egalité, où la lettre inconnuë a une dimenſion.* ibid
Probl. II. *Reſoudre une Double Egalité, où la lettre inconnuë a deux dimenſions.* 579
Queſt. I. *Trouver deux nombres, tels que ſi de chacun, de leur ſomme, & de leur difference, on ôte le produit des deux nombres il reſte deux nombres quarrez.* 592
Queſt. II. *Trouver deux nombres, tels que ſi de chacun, de leur ſomme, & de leur difference on ôte la difference de leurs quarrez, il reſte quatre nombres quarrez.* 594
Queſt. III. *Trouver deux nombres, tels que ſi de chacun, de leur ſomme, & de leur difference, on ôte un même nombre donné, il reſte quatre nombres quarrez.* 596
Queſt. IV. *Trouver deux nombres triangulaires, dont la ſomme & la difference ſoient chacun un nombre triangulaire.* 598
Queſt. V. *Trouver quatre nombres tels que ſi à chacun, à leur ſomme, au plan des deux premiers, à celui des deux moyens, & à celui des deux derniers, on ajoûte un même nombre donné, il vienne huit nombres quarrez.* 601
Queſt. VI. *Trouver en nombres un triangle rectangle, tel que le Plan des deux côtez étant ôté de chacun des deux mêmes côtez, & de l'hypotenuſe, il reſte trois nombres quarrez.* 603
Queſt. VII. *Trouver trois nombres, dont le premier étant ajoûté à chacun des deux autres, à leur ſomme, & à leur difference, il vienne quatre nombres quarrez.* 604

Queſt.

Queſt. VIII. *Trouver en nombres le triangle obliquangle ABC, dont chaque côté, la perpendiculaire BD, la droite BE, qui diviſe la baſe AC en deux également, & tous les ſegmens de la même baſe, ſoient exprimez par des nombres rationnels.* 606

Queſt. IX. *Trouver un triangle rectangle, dont l'aire ſoit égale à celle d'un triangle rectangle donné.* 612

Queſt. X. *Trouver deux nombres, tels que ſi de leur ſomme on ôte le quarré de chacun, il reſte deux nombres quarrez.* 615

Queſt. XI. *Trouver quatre nombres proportionnels, en ſorte que ſi à leur Plan-plan on ajoûte le ſolide de trois quelconques, il vienne quatre nombres quarrez.* 619

Queſt. XII. *Trouver deux nombres Plans ſemblables, en ſorte que ſi de chacun on ôte le quarré de l'autre, il reſte deux nombres quarrez.* 621

Queſt. XIII. *Trouver deux nombres, dont la ſomme étant ajoûtée au quarré de chacun, il vienne deux nombres quarrez.* 629

Queſt. XIV. *Trouver deux nombres quarrez, dont chacun étant diminué du quarré de leur ſomme, il reſte deux nombres quarrez.* 645

Des Triples Egalitez. 646

Probl. I. *Reſoudre une Triple Egalité, où la lettre inconnuë n'a qu'une dimenſion.* 647

Probl. II. *Reſoudre une Triple Egalité, où la lettre inconnuë a deux dimenſions.* 653

Queſt. I. *Trouver trois nombres proportionnels, en ſorte que ſi à leur produit ſolide on ajoûte le quarré de chacun, il vienne trois nombres quarrez.* 654

Queſt. II. *Trouver trois nombres proportionnels, en ſorte que ſi à leur produit ſolide on ajoûte le plan de deux quel-*

quelconques, il vienne trois nombres quarrez. 658
Queſt. III. *Trouver quatre nombres, tels que ſi au produit ſolide des trois premiers on ajoûte le plan de deux quelconques, il vienne par tout un nombre quarré.* 661
Queſt. IV. *Trouver quatre nombres, tels que la difference de deux quelconques ſoit un nombre quarré.* 662

NOUVEAUX ELEMENS D'ALGEBRE.

SECONDE PARTIE.

LIVRE TROISIE'ME.

Des Problêmes d'Arithmetique.

LEs Problêmes en nombres peuvent être déterminez, & indéterminez. Quand ils ſont déterminez, leur ſolution eſt neceſſairement ou rationnelle, ou irrationnelle, ſelon la nature du Problême, & des nombres donnez: & quand ils ſont indéterminez, on leur ajoûte les conditions neceſſaires, afin que leur ſolution devienne rationnelle, quand elle ne l'eſt pas d'elle-même, comme vous verrez dans le dernier des deux Chapitres ſuivans.

CHAPITRE I.

Des Problêmes Déterminez.

BIEN que les Problêmes que je prétens ici reſoudre, ne ſoient propoſez qu'en nombres, je ne laiſſe-

aiſſerai pas de les reſo udre en lettres, en mettant des lettres à la place des nombres donnez, afin d'avoir une ſolution générale, qui ſerve comme de canon, ou de regle générale, pour reſoudre ſans Algebre un ſemblable Problême, quand on en changera les nombres donnez en d'autres, étant certain que les lettres qui demeurent dans une ſolution générale, peuvent repréſenter tel nombre qu'on voudra.

SECTION I.

Des Problêmes ſimples.

IL eſt évident que la ſolution d'un Problême ſimple eſt toûjours rationnelle, pour le moins quand les nombres donnez ſont rationnels, parce que ſon Equation conſtitutive n'eſt que d'une dimenſion, comme vous allez voir dans les Problêmes ſuivans.

PROBLEME I.

Trouver deux nombres, dont la ſomme, & la difference ſoient égales à des nombres donnez.

POur connoître par exemple dans un triangle rectiligne ſcalene rectangle, les deux angles aigus, dont le plus grand ſurpaſſe le plus petit de 10 degrez, on conſiderera que puiſque ces deux angles aigus ſont enſemble 90 degrez, il n'y a qu'à *trouver deux nombres, dont la ſomme ſoit 90, & dont la difference ſoit 10:* car le plus grand de ces deux nombres ſera le nombre des degrez du plus grand des deux angles qu'on cherche, & le plus petit donnera le nombre des degrez du plus petit angle.

Nous reſoudrons ce Problême en trois façons, afin que cela vous ſerve de modéle pour reſoudre les ſuivans par

par celle qui vous ſemblera la plus commode. La premiere ſe pratiquera en trouvant dans l'Equation qui renferme une des conditions du Problême, laquelle à cauſe de cela nous apellerons *Equation conditionnelle*, la valeur d'une lettre inconnuë, & en ſubſtituant à la place de cette lettre inconnuë ſa valeur trouvée dans l'autre l'Equation conditionnelle, pour avoir une autre Equation, où l'on pourra connoître l'autre lettre inconnuë, qui ſervira pour venir à la connoiſſance de la premiere.

La ſeconde maniere eſt de trouver dans deux Equations conditionnelles la valeur d'une même lettre inconnuë, & d'égaler enſemble les deux valeurs trouvées de cette lettre inconnuë par une Equation, dans laquelle on pourra connoître l'autre lettre inconnuë, qui contribuera, comme auparavant, à connoître la premiere dans celle qu'on voudra de ſes deux valeurs trouvées.

La troiſiéme maniere ſe pratiquera en ajoûtant enſemble deux Equations conditionnelles, & en ôtant la plus petite de la plus grande, pour avoir deux autres Equations, dont chacune ne contiendra dans ce Problême qu'une lettre inconnuë, laquelle par conſéquent on pourra connoître, comme vous allez voir..

Premiere methode.

Si l'on met, pour avoir une ſolution générale, la lettre a, pour le nombre donné 90, & la lettre b pour l'autre nombre donné 10, & que l'on mette x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, en prenant x pour le plus grand de ces deux nombres; on aura ſelon les deux conditions de la queſtion ces deux Equations à reſoudre.

$x+y \gtrless a.$
$x-y \gtrless b.$

Dans la premiere Equation, $x+y \gtrless a$, l'on trouvera par l'Antitheſe, $x \gtrless a-y$, & alors en changeant x en $a-y$, la deuxiéme Equation conditionnelle $x-y \gtrless b$, ſe changera en celle-ci, $a-2y \gtrless b$, dans laquelle on trouvera par l'Antitheſe, $a-b \gtrless 2y$, & par conſéquent $y \gtrless \frac{a-b}{2}$, pour le plus petit des deux nombres qu'on cherche. C'eſt pourquoi au lieu de $x \gtrless a-y$, l'on aura $x \gtrless \frac{a+b}{2}$, pour l'autre & plus grand nombre qu'on demande. Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{a+b,\ a-b}{2}.$$

A cauſe de $a \gtrless 90$, & de $b \gtrless 10$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur, 50, 40, c'eſt à-dire, que le plus grand des deux angles aigus que l'on demande, ſera de 50 degrez, & le plus petit de 40 degrez.

On tire de cette ſolution générale, le canon ſuivant, pour reſoudre ce Problême. *Si l'on ajoûte enſemble les deux nombres donnez, & qu'on ôte le plus petit du plus grand, la moitié de la ſomme & du reſte donneront les deux nombres qu'on cherche.*

Deuxiéme methode.

Ayant trouvé par l'Antitheſe, $a-y$ pour x, dans la premiere Equation conditionnelle, $x+y \gtrless a$, l'on trouvera auſſi par l'Antitheſe, $b+y$ pour le même x, dans l'autre Equation conditionnelle, $x-y \gtrless b$ C'eſt pourquoi l'on aura cette troiſiéme Equation, $a-y \gtrless b+y$, dans

dans laquelle on trouvera $y \gtrless \frac{a-b}{2}$, comme auparavant: & au lieu de $x \gtrless a-y$, ou de $x \gtrless b+y$, l'on aura $x \gtrless \frac{a+b}{2}$, auſſi comme auparavant.

Troiſiéme methode.

Si l'on ajoûte enſemble les deux Equations conditionnelles, & qu'on ôte la plus petite de la plus grande, l'on aura ces deux autres Equations,

$$2x \gtrless a+b.$$
$$2y \gtrless a-b.$$

dans leſquelles on trouvera $x \gtrless \frac{a+b}{2}$, & $y \gtrless \frac{a-b}{2}$, comme auparavant, pour les deux nombres qu'on cherche.

Remarque.

Lorſqu'il s'agit de la ſomme & de la difference de deux grandeurs inégales, comme dans ce Problême, l'on a ordinairement une analyſe abregée pour le reſoudre, qui conſiſte à mettre auſſi la ſomme & la difference de deux lettres inconnuës pour les deux nombres qu'on cherche, ces poſitions étant tout-à-fait conformes à la nature du Problême.

Comme ici en mettant $x+y$, pour le plus grand des deux nombres qu'on cherche, & $x-y$ pour le plus petit, on aura ſelon les deux conditions de la queſtion, ces deux Equations conditionnelles,

$$2x \gtrless a.$$
$$2y \gtrless b.$$

où l'on trouvera $x \gtrless \frac{1}{2}a$, & $y \gtrless \frac{1}{2}b$, & au lieu de $x+y$, $x-y$, l'on aura $\frac{a+b, a-b}{2}$, pour les deux nombres qu'on cherche, comme auparavant.

PROBLEME II.

Trouver trois nombres inégaux, tels que leur ſomme, la ſomme du plus grand & du moyen, & la ſomme du moyen & du plus petit, ſoient égales à des nombres donnez.

POur connoître les trois angles par exemple d'un Triangle rectiligne ſcaléne, en ſçachant que la ſomme du plus grand angle & du moyen eſt de 140 degrez, & que la ſomme du moyen & du plus petit eſt de 100 degrez; on conſiderera que puiſque la ſomme de ces trois angles eſt de 180 degrez, on doit *chercher trois nombres, tels que leur ſomme ſoit* 180, *que la ſomme du plus grand & du moyen ſoit* 140, *& que la ſomme du moyen & du plus petit ſoit* 100, pour avoir le nombre des degrez de chacun des trois angles qu'on cherche.

Si l'on met la lettre *a* pour le plus grand nombre donné 180, la lettre *b* pour le moyen nombre donné 140, & la lettre *c* pour le plus petit nombre donné 100, afin d'avoir une ſolution générale: & que l'on mette x, y, z, pour les trois nombres qu'on cherche, en ſorte que le plus grand ſoit repréſenté par la lettre x, le moyen par la lettre y, & le plus petit par la lettre z; l'on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces trois Equations à reſoudre,

$$x+y+z \propto a.$$
$$x+y \propto b.$$
$$y+z \propto c.$$

Dans la premiere Equation conditionnelle $x+y+z \propto a$, l'on trouvera par l'Antitheſe $x \propto a-y-z$, & dans la deuxiéme $x+y \propto b$, l'on trouvera le même $x \propto b-y$. C'eſt pourquoi l'on aura cette Equation, $a-y-z \propto b-y$,

$\gtrless b-y$, dans laquelle on trouvera $a-b$ pour le plus petit nombre z, lequel par conſéquent ſera connu.

Si à la place de z, l'on ſubſtituë dans la troiſiéme Equation conditionnelle, $y+z \gtrless c$, ſa valeur trouvée $a-b$, l'on aura cette autre Equation, $y+a-b \gtrless c$, dans laquelle on trouvera par l'Antitheſe, $b+c-a$, pour le nombre moyen y: & alors au lieu de $x \gtrless a-y-z$, ou de $x \gtrless b-y$, l'on aura $x \gtrless a-c$, pour le plus grand des trois nombres qu'on cherche, leſquels par conſéquent ſeront tels,

$$a-c,\ b+c-a,\ a-b.$$

A cauſe de $a \gtrless 180$, de $b \gtrless 140$, & de $c \gtrless 100$, les trois nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur, 80, 60, 40: de ſorte que le plus grand des trois angles qu'on cherche, ſera de 80 degrez, le moyen ſera de 60 degrez, & le plus petit ſera de 40 degrez.

On tire de cette ſolution générale le Canon ſuivant, pour reſoudre ce Problême. *Si du plus grand des trois nombres donnez on ôte ſéparément châcun des deux autres, on aura le plus grand & le plus petit des trois nombres qu'on cherche: & on aura le moyen en ôtant le plus grand des trois nombres donnez de la ſomme des deux autres;* où l'on voit que la détermination de cette Queſtion à l'égard des trois nombres donnez, eſt que *le plus grand doit être moindre que la ſomme des deux autres,* afin que le Problême propoſé ſoit poſſible en nombres poſitifs, ou affirmez, ce qui s'entend toûjours ainſi dans ces ſortes de Queſtions.

Autre Analyſe.

Pour faire des poſitions conformes à la nature du Problême, c'eſt à dire pour faire que le plus grand des trois nombres qu'on cherche, ſoit neceſſairement

tel, & que pareillement le plus petit ſoit neceſſairement plus petit, & que le moyen ſoit eſſentiellement plus grand que le plus petit, & moindre que le plus grand, mettez $x-y$ pour le plus petit, x pour le moyen, & $x+z$ pour le plus grand, & alors on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces trois autres Equations à reſoudre.

$$3x-y+z \gtrless a.$$
$$2x+z \gtrless b.$$
$$2x-y \gtrless c.$$

Dans la troiſiéme $2x-y \gtrless c$, l'on trouvera par l'Antitheſe, $y \gtrless 2x-c$, & dans la ſeconde $2x+z \gtrless b$, l'on trouvera auſſi par l'Antitheſe, $z \gtrless b-2x$: c'eſt pourquoi ſi l'on change, y, en $2x-c$, & z en $b-2x$, la premiere Equation conditionnelle, $3x-y+z \gtrless a$, ſe changera en celle ci, $b+c-x \gtrless a$, où l'on trouvera $x \gtrless b+c-a$, pour le moyen des trois nombres qu'on cherche, comme auparavant, & alors au lieu de $y \gtrless 2x-c$, & de $z \gtrless b-2x$, l'on aura $y \gtrless 2b+c-2a$, & $z \gtrless 2a-b-2c$, & enfin au lieu des deux autres nombres, $x+z$, $x-y$, l'on aura ces deux $a-c$, $a-b$, auſſi comme auparavant.

PROBLEME III.

Trouver trois nombres, tels que la ſomme de deux quelconques ſoit égale à un nombre donné.

POur connoître par exemple de trois perſonnes, l'âge de châcun, en ſçachant que le nombre des années du premier & du ſecond eſt $104 \gtrless a$, que le nombre des années du ſecond & du troiſiéme eſt $140 \gtrless b$, & que le nombre des années du premier & du troiſiéme eſt $160 \gtrless c$; l'on mettra x, y, z, pour le nombre des années de châcun, & alors on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces trois Equations à reſoudre,

$x+y$

$x+y \mathrel{)\!(} a.$
$y+z \mathrel{)\!(} b.$
$x+z \mathrel{)\!(} c.$

Dans la premiere $x+y \mathrel{)\!(} a$, l'on trouvera $y \mathrel{)\!(} a-x$, & dans la ſeconde $y+z \mathrel{)\!(} b$, l'on trouvera le même $y \mathrel{)\!(} b-z$: c'eſt pourquoi l'on aura cette Equation, $a-x \mathrel{)\!(} b-z$, où l'on trouvera $x \mathrel{)\!(} a-b+z$, ſi donc on change x en $a-b+z$, la troiſiéme Equation conditionnelle $x+z \mathrel{)\!(} c$, ſe changera en celle-ci, $a-b+2z \mathrel{)\!(} c$, dans laquelle on trouvera $x \mathrel{)\!(} \frac{b+c-a}{2}$: & alors au lieu de $x \mathrel{)\!(} a-b+z$, l'on aura $x \mathrel{)\!(} \frac{a-b+c}{2}$, & au lieu de $y \mathrel{)\!(} a-x$, ou de $y \mathrel{)\!(} b-z$, l'on aura $y \mathrel{)\!(} \frac{a+b-c}{2}$

Ainſi les trois nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{a-b+c,\ a+b-c,\ a+b+c}{2}.$$

A cauſe de $a \mathrel{)\!(} 104$, de $b \mathrel{)\!(} 140$, & de $c \mathrel{)\!(} 160$, les trois nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur, 62, 42, 98, c'eſt-à-dire dans cet exemple, que la premiere perſonne doit être âgée de 62 ans, la deuxiéme de 42 ans, & la troiſiéme de 98 ans.

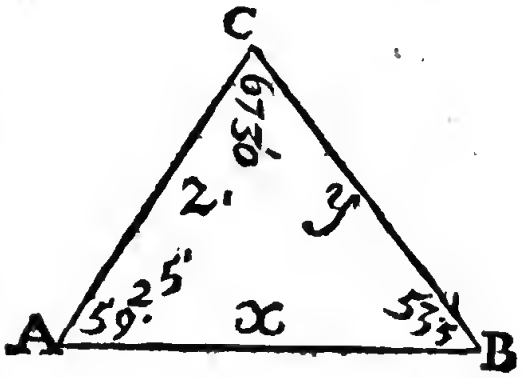
On tire de cette ſolution générale le Canon ſuivant pour reſoudre ce Problême. *Si des trois nombres donnez, on ôte châcun de la ſomme des deux autres, on aura en la moitié de chaque reſte les trois nombres qu'on cherche;* où l'on voit, que pour la détermination de cette Queſtion à l'égard des trois nombres donnez, *il faut que châcun ſoit moindre que la ſomme des deux autres.*

PRO-

PROBLEME IV.

Trouver les côtez d'un Triangle rectiligne, dont on connoît les angles, & le contour.

POur connoître les côtez du Triangle rectiligne ABC, dont le contour, ou la ſomme de ſes trois côtez, eſt par exemple de 462 pieds, & dont les angles ſont d'autant de degrez & de minutes que vous les voyez ici marquez; mettez la lettre *a* pour le ſinus 86089 de l'angle A, la lettre *b* pour le ſinus 79951 de l'angle B, la lettre *c* pour le ſinus 92388 de l'angle C, & la lettre *d* pour le contour 462, afin d'avoir une ſolution générale.



Cela étant ſuppoſé, ſi l'on apelle *x* le côté AB, *y* le côté BC, & *z* le troiſiéme côté AC, l'on conſiderera que comme ces côtez ſont proportionnels aux ſinus de leurs angles oppoſez, c'eſt-à-dire que le ſinus de l'angle A, eſt à ſon côté oppoſé BC, comme le ſinus de l'angle C, eſt à ſon côté oppoſé AB, l'on aura en termes analytiques cette analogie, $a, y :: c, x$, & par conſéquent cette Equation, $ax \propto cy$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{cy}{a}$. De même parce que le ſinus de l'angle A, eſt à ſon côté oppoſé BC, comme le ſinus de l'angle B, eſt à ſon côté oppoſé AC, l'on aura en termes analytiques cette analogie, $a, y :: b, z$, &

& par conſéquent cette Equation, $az \propto by$, où l'on trouvera $z \propto \frac{cy}{a}$.

Enfin parce que le contour a été apellé d, & que ce contour eſt $x+y+z$, l'on aura cette Equation, $x+y+z \propto d$, laquelle en changeant x en ſa valeur trouvée, $\frac{cy}{a}$, & z en ſa valeur trouvée $\frac{by}{a}$, ſe changera en celle-ci, $\frac{cy}{a}+y+\frac{by}{a} \propto d$, laquelle étant multipliée par a, pour éviter les fractions, ſe reduit à celle ci, $cy+ay+by \propto ad$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{ad}{a+b+c}$ pour le côté BC, lequel par conſéquent ſera connu: & alors en ſubſtituant cette valeur à la place de y, au lieu de $x \propto \frac{cy}{a}$, l'on aura $x \propto \frac{cd}{a+b+c}$, pour le côté AB: & au lieu de $z \propto \frac{by}{a}$, l'on aura $z \propto \frac{bd}{a+b+c}$, pour le côté AC. Ainſi les trois côtez qu'on cherche, ſeront tels,

$$AB \propto \frac{cd}{a+b+c} \propto 165.$$

$$AC \propto \frac{bd}{a+b+c} \propto 143.$$

$$BC \propto \frac{ad}{a+b+c} \propto 154.$$

A cauſe de $a \propto 86089$, de $b \propto 79951$, de $c \propto 92388$, & de $d \propto 462$, les trois côtez du Triangle ABC, ſeront d'autant de pieds que vous les voyez ici marquez.

On tire de cette ſolution générale le Canon ſuivant, pour trouver le côté qu'on voudra du Triangle propoſé. *Si l'on multiplie le contour donné par le ſinus de l'angle oppoſé au côté qu'on cherche, & qu'on diviſe le produit par la ſomme des ſinus des trois angles donnez, on aura*

aura ce côté, dont la démonſtration eſt évidente, *par* 18. 5.

Il eſt évident que ce Problême ne ſoufre aucune détermination à l'égard des quantitez données, parce que dans la reſolution générale elles ſont toutes affirmées.

PROBLEME V.

Trouver deux nombres tels que châcun avec ſes parties aliquotes faſſe une même ſomme.

SI l'on met $2x$, $4y$, pour les deux nombres qu'on cherche, l'on aura ſelon la condition de la Queſtion, cette Equation, $3x+3 \gg 7y+7$, dans laquelle on trouvera $x \gg \frac{7y+4}{3}$: or comme la nature du Problême demande que les deux quantitez indéterminées x, y, ſoient des nombres premiers, en mettant le nombre premier 5 pour y, l'on aura cet autre nombre premier 13 pour x. Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront 26, 20, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 42.

Si vous voulez deux autres nombres, mettez $4x$, $8y$, pour ces deux nombres, & ſelon la condition de la Queſtion, vous aurez cette Equation, $7x+7 \gg 15y+15$, dans laquelle vous trouverez $x \gg \frac{15y+8}{7}$. C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $y \gg 13$: l'on trouvera $x \gg 29$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 116, 104 : dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 210.

Si vous voulez encore deux autres nombres, mettez $8x$, $16y$, pour ces deux nombres, & ſelon la condition de la Queſtion l'on aura cette Equation, $15x$

$+15 \gtrless 31y+31$, où l'on trouvera $x \gtrless \frac{31y+16}{15}$: & ſi l'on ſuppoſe $y \gtrless 29$, on trouvera $x \gtrless 61$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 488, 464, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 930.

Par là vous voyez qu'on peut trouver à l'infini deux autres nombres qui deviendront plus grands à meſure que les nombres qui multiplient les deux inconnuës, & qui doivent toûjours être en raiſon double, ſeront plus grands: & les moindres de tous ſe trouveront en mettant $1x$, $2y$, pour ces deux nombres, & alors on aura ſelon la condition de la Queſtion, cette Equation, $x+1 \gtrless 3y+3$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless 3y+2$: & ſi l'on ſuppoſe $y \gtrless 3$, car on ne le peut pas ſuppoſer moindre, l'on trouvera $x \gtrless 11$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 11, 6, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 12.

On peut par cette ſeule poſition trouver autant de nombres plus grands que l'on voudra: car ſi dans la même Equation $x \gtrless 3y+2$, l'on ſuppoſe $y \gtrless 5$, l'on trouvera $x \gtrless 17$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 17, 10, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 18.

Pareillement ſi dans la même Equation, $x \gtrless 3y+2$, l'on ſuppoſe $y \gtrless 7$, l'on trouvera $x \gtrless 23$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 23, 14, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 24.

Mais ſi dans la même Equation, $x \gtrless 3y+2$, l'on ſuppoſe $y \gtrless 13$, l'on trouvera $x \gtrless 1$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 41, 26, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 42, comme les deux 26, 20, qui ont été trouvez auparavant. Ainſi nous avons ces trois nombres 20, 26, 41, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 42.

Si dans la même Equation, $x \gtrless 3y+2$, l'on ſuppo-

ſe

ſe $y \gg 17$, l'on trouvera $x \gg 53$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 53, 34, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 54.

Que ſi dans la même Equation, $x \gg 3y+2$, l'on ſuppoſe $y \gg 19$, l'on trouvera $x \gg 59$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 59, 38, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 60.

Enfin ſi dans la même Equation, $x \gg 3y+2$, l'on ſuppoſe $y \gg 23$, l'on trouvera $x \gg 71$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 71, 46, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 72.

Ainſi vous voyez, qu'en mettant pour y pluſieurs differents nombres premiers, afin que ce nombre, y, n'ait pas plus de parties aliquotes qu'il en a dans l'Analyſe, l'on trouve auſſi pluſieurs differents nombres premiers pour x, & qu'ainſi l'on a pluſieurs differentes ſolutions de ce Problême.

Mais au lieu de la raiſon double, on peut ſe ſervir de la raiſon triple; Ainſi en mettant $1x$, $3y$, pour les deux nombres qu'on cherche, l'on aura ſelon la condition de la Queſtion, cette Equation, $x+1 \gg 4y+4$, dans laquelle on trouvera $x \gg 4y+3$.

C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $y \gg 2$, l'on trouvera $x \gg 11$, & les deux nombres qu'on cherche ſeront 11, 6, comme auparavant. Mais ſi l'on ſuppoſe $y \gg 5$, l'on trouvera $x \gg 23$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 23, 15, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 24, comme les deux 23, 14, qui ont été trouvez auparavant. Ainſi nous avons encore trois nombres 14, 15, 23, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait une même ſomme, ſçavoir 24.

Que ſi l'on ſuppoſe $y \gg 17$, l'on trouvera $x \gg 71$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 71, 51, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 72, comme les deux 71, 46, qui ont été trouvez auparavant.

Ainſi

Ainſi l'on a encore trois autres nombres, ſçavoir 46, 51, 71, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait auſſi une même ſomme, ſçavoir 72.

On peut encore au lieu de la raiſon double, ou triple, ſe ſervir de telle autre raiſon que l'on voudra, comme ſi l'on met $2x$, $3y$, pour les deux nombres qu'on cherche, l'on aura ſelon la condition de la Queſtion, cette Equation, $3x+3 \gtrdot 4y+4$, dans laquelle on trouvera $x \gtrdot \frac{4y+1}{3}$.

C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $y \gtrdot 5$, l'on trouvera $x \gtrdot 7$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 14, 15, tels qu'ils ont déja été trouvez auparavant: & ſi l'on ſuppoſe $y \gtrdot 17$, l'on trouvera $x \gtrdot 23$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 46, 51, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 72, comme les deux 46, 71, qui ont été trouvez auparavant.

Mais ſi l'on ſuppoſe $y \gtrdot 23$, l'on trouvera $x \gtrdot 31$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 62, 69, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 96. Ainſi des autres.

Remarque.

Quoi que ce Problême ſoit indéterminé, parce que dans la valeur trouvée de x, il demeure la grandeur indéterminée y: neanmoins je l'ai bien voulu mettre au nombre des Problêmes déterminez, parce que cette grandeur y, ſe trouve en quelque façon déterminée, puiſqu'elle doit être non ſeulement un nombre entier, mais encore un nombre premier.

Le hazard nous a donné trois nombres tels que châcun avec ſes parties aliquotes fait une même ſomme: mais ſi vous les voulez trouver methodiquement, mettez $1x$, $2y$, $3z$, pour ces trois nombres, & alors ſelon les conditions de la Queſtion, vous aurez ces deux Equations à reſoudre.

$x+1 \mathrel{)\!(} 3y+3.$

$x+1 \mathrel{)\!(} 4z+4.$

Dans la premiere Equation, $x+1 \mathrel{)\!(} 3y+3$, l'on trouvera $x \mathrel{)\!(} 3y+2$, & dans la ſeconde $x+1 \mathrel{)\!(} 4z+4$, l'on trouvera le même $x \mathrel{)\!(} 4z+3$, d'où l'on tire cette troiſiéme Equation, $3y+2 \mathrel{)\!(} 4z+3$, dans laquelle on trouvera $y \mathrel{)\!(} \frac{4z+1}{3}$

C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $z \mathrel{)\!(} 5$, l'on trouvera $y \mathrel{)\!(} 7$, & $x \mathrel{)\!(} 23$, & les trois nombres qu'on cherche, ſeront 23, 14, 15, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 24: & ſi l'on ſuppoſe $z \mathrel{)\!(} 17$, l'on trouvera $y \mathrel{)\!(} 23$, & $x \mathrel{)\!(} 71$, & les trois nombres qu'on cherche, ſeront 71, 46, 51, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 72. Ainſi des autres.

PROBLEME VI.

Trouver deux nombres, tels que la ſomme des parties aliquotes du premier ſurpaſſe la ſomme des parties aliquotes du ſecond d'un nombre quarré.

SI l'on met xxy, xxz, pour les deux nombres qu'on cherche, & le quarré $\omega\omega$ pour l'excès des parties aliquotes du premier ſur celles du ſecond, la ſomme des parties aliquotes du premier ſera $x+xx+y+xy+1$, & la ſomme des parties aliquotes du ſecond ſera $x+xx+z+xz+1$, laquelle étant ôtée de la précedente, on aura l'excès, $y+xy-z-xz$, qui doit être égal au quarré $\omega\omega$. Ainſi l'on aura cette Equation, $y+xy-z-xz \mathrel{)\!(} \omega\omega$, dans laquelle on trouvera $x \mathrel{)\!(} \frac{\omega\omega-y+z}{y-z}$.

Cette valeur auſſi-bien que châcune des deux quantitez indéterminées, y, z, doit être un nombre premier, afin que les deux nombres xxy, xxz, n'ayent point

point d'autres parties aliquotes que celles que vous avez vûës dans l'Analyſe. Si donc on met le nombre premier 5 pour x, en ſorte qu'on ait $5 \propto \frac{\omega\omega - y + z}{y - z}$, cette Equation ſe reduira à celle-ci, $\frac{\omega\omega}{6} \propto y - z$, où l'on voit que le quarré $\omega\omega$ doit être un nombre entier multiple de 6, afin qu'il ſe puiſſe diviſer par 6. C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $\omega \propto 6$, au lieu de $\frac{\omega\omega}{6}$, l'on aura 6, & l'Equation précedente $\frac{\omega\omega}{6} \propto y - z$, ſe changera en celle-ci, $6 \propto y - z$, où l'on voit que les deux quantitez y, z, doivent être deux nombres premiers, dont la difference ſoit 6, tels que ſont les deux 13, 7. Si donc on ſuppoſe $y \propto 13$, & $z \propto 7$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront 325, 175 : car la ſomme 109 des parties aliquotes 1, 5, 13, 25, 65, du premier 325, ſurpaſſe la ſomme 73 des parties aliquotes 1, 5, 7, 25, 35, du ſecond 175, du nombre quarré 36.

On aura de plus petits nombres, ſi au lieu de ſuppoſer $x \propto 5$, l'on ſuppoſe $x \propto 3$, & alors au lieu de $x \propto \frac{\omega\omega - y + z}{y - z}$, l'on aura cette autre Equation, $3 \propto \frac{\omega\omega - y + z}{y - z}$, qui ſe reduit à celle-ci, $\frac{\omega\omega}{4} \propto y - z$, où l'on voit que le quarré $\omega\omega$ doit être un nombre entier multiple de 4, afin qu'il ſoit diviſible par 4. Si donc on ſuppoſe $\omega \propto 4$, l'on aura $4 \propto y - z$, où l'on voit auſſi que les deux quantitez indéterminées y, z, doivent être deux nombres premiers, dont la difference ſoit 4, tels que ſont les deux 11, 7. Si donc on ſuppoſe $y \propto 11$, & $z \propto 7$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront 99, 63 : car la ſomme 57 des parties aliquotes, 1, 3, 9, 11, 33, du premier 99, ſurpaſſe la ſomme 41 des parties aliquotes, 1, 3, 7, 9, 21, du ſecond 63, du nombre quarré 16,

PROBLEME VII.

Trouver un nombre qui ſoit égal à la ſomme de ſes parties aliquotes.

UN ſemblable nombre eſt apellé *nombre parfait*, & l'on en peut trouver autant que l'on voudra, par le moyen du nombre 2, & de ſes puiſſances 4, 16, 64, 256, 1024, &c. dont les Expoſans ſont des nombres pairement pairs, & dont la proprieté eſt telle que chacune avec ſes parties aliquotes fait un nombre premier, en cette ſorte.

Si l'on met $2x$ pour le nombre qu'on cherche, l'on aura ſelon la condition de la Queſtion cette Equation, $2x \propto 3+x$, dans laquelle on trouvera $x \propto 3$. Ainſi au lieu de $2x$, l'on aura 6 pour le nombre qu'on cherche.

Si vous voulez un nombre plus grand, mettez $4x$ pour ce nombre, & ſelon la condition de la Queſtion, vous aurez cette Equation, $4x \propto 7+3x$, dans laquelle on trouvera $x \propto 7$: c'eſt pourquoi le nombre qu'on cherche, ſera 28.

Si vous voulez un nombre encore plus grand, mettez $16x$ pour ce nombre, & ſelon la condition de la Queſtion, vous aurez cette Equation, $16x \propto 31+15x$, dans laquelle on trouvera $x \propto 31$, & le nombre qu'on cherche, ſera 496.

Si vous voulez un autre nombre encore plus grand, mettez $64x$ pour ce nombre, & ſelon la condition de la Queſtion, vous aurez cette Equation, $64x \propto 127+63x$, ou l'on trouvera $x \propto 127$, lequel étant multiplié par 64, l'on aura 8128 pour le nombre qu'on cherche.

Que ſi vous en voulez encore un plus grand, mettez $256x$ pour ce nombre, & ſelon la condition de la

Queſtion

Queſtion, vous aurez cette Equation, $256x \not\propto 511+255x$, dans laquelle on trouvera $x \not\propto 511$, lequel étant multiplié par 256, l'on aura 130816 pour le nombre qu'on cherche.

Pareillement ſi vous voulez un autre nombre plus grand, mettez $1024x$ pour ce nombre, & ſelon la condition de la Queſtion, vous aurez cette Equation, $1024x \not\propto 2047+1023x$, où l'on trouvera $x \not\propto 2047$, lequel étant multiplié par 1024, l'on aura 2096128 pour le nombre qu'on cherche.

PROBLEME VIII.

Trouver deux nombres, dont chacun ſoit égal à la ſomme des parties aliquotes de l'autre.

SI l'on met $4x$, $4yz$, pour ces deux nombres, qu'on apelle *nombres amiables*, on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces deux Equations à reſoudre,

$$7+3x \not\propto 4yz.$$
$$7+7y+7z+3yz \not\propto 4x.$$

Dans la premiere Equation, $7+3x \not\propto 4yz$, l'on trouvera $x \not\propto \frac{4yz-7}{3}$, & par conſéquent $4x \not\propto \frac{16yz-28}{3}$, & alors la deuxiéme Equation conditionnelle, $7+7y+7z+3yz \not\propto 4x$, ſe changera en celle-ci, $7+7y+7z+3yz \not\propto \frac{16yz-28}{3}$, dans laquelle on trouvera $y \not\propto \frac{3z+7}{z-3}$, ou $y \not\propto 3+\frac{16}{z-3}$, où l'on voit que z doit être plus grand que 3, à cauſe du Dénominateur $z-3$. Or comme les trois quantitez indéterminées x, y, z, doivent être des nombres premiers, ſi l'on ſuppoſe $z \not\propto 5$, l'on trouvera $y \not\propto 11$, & par conſéquent $x \not\propto 71$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 284, 220.

Si vous voulez de plus grands nombres, mettez $8x$, $8yz$, pour ces deux nombres, & ſelon les conditions de la Queſtion, vous aurez ces deux Equations à reſoudre.

$$15+7x \square 8yz.$$
$$15+15y+15z+7yz \square 8x.$$

Dans la premiere Equation, $15+7x \square 8yz$, l'on trouvera $x \square \frac{8yz-15}{7}$, & par conſéquent $8x \square \frac{64yz-120}{7}$, & alors au lieu de la ſeconde Equation conditionnelle, $15+15y+15z+7yz \square 8x$, on aura celle-ci, $15+15y+15z+7yz \square \frac{64yz-120}{7}$, dans laquelle on trouvera $y \square \frac{7z+15}{z-7}$, où l'on voit que z doit être un nombre premier plus grand que 7, à cauſe du Dénominateur $z-7$. Si donc on ſuppoſe $z \square 11$, l'on trouvera $y \square 23$, & par conſéquent $x \square 287$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeroient 2296, 2024, ſi la valeur trouvée de x, ſçavoir 287 étoit un nombre premier, car il eſt compoſé, parce qu'il eſt produit par la Multiplication de ces deux 7, 41.

Puiſque donc cette valeur trouvée de x, n'eſt pas un nombre premier, il eſt évident que les deux nombres trouvez 2296, 2024, ne ſatisfont pas à la queſtion, parce qu'ils ont un plus grand nombre de parties aliquotes que dans l'Analyſe: & comme le même inconvenient arrive toûjours, quelque nombre premier que l'on prenne pour z, au lieu de ſe ſervir de 8, qui eſt le Cube de 2, l'on ſe ſervira de 16, qui eſt le quarré-quarré du même nombre 2, comme auparavant l'on s'eſt ſervi de ſon quarré 4.

Si donc on met $16x$, $16yz$, pour les deux nombres qu'on cherche, l'on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces deux Equations à reſoudre,

$31+15x$

$31+15x \gtrless 16yz.$

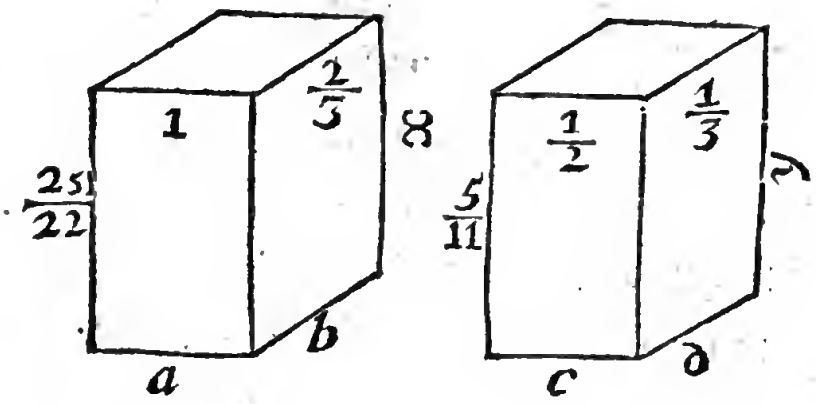
$31+31y+31z+15yz \gtrless 16x.$

Dans la premiere Equation, $31+15x \gtrless 16yz$, l'on trouvera $x \gtrless \frac{16yz-31}{15}$, c'eſt pourquoi ſi l'on change x en $\frac{16yz-31}{15}$, la deuxiéme Equation conditionnelle, $31+31y+31z+15yz \gtrless 16x$, ſe changera en celle-ci, $31+31y+31z+15yz \gtrless \frac{256yz-496}{15}$, dans laquelle on trouvera $y \gtrless \frac{15z+31}{z-15}$, où l'on voit que z doit être un nombre premier plus grand que 15, à cauſe du Dénominateur $z-15$. Si donc on ſuppoſe $z \gtrless 23$, l'on trouvera $y \gtrless 47$, & $x \gtrless 1151$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 18416, 17296. Ainſi des autres.

PROBLEME IX.

Trouver en nombres les hauteurs de deux Parallelepipedes rectangles, dont les longueurs & les largeurs ſont données auſſi en nombres, en ſorte que la ſomme de leurs ſoliditez ſoit égale à la ſomme de leurs baſes, & la difference des mêmes ſoliditez égale à la difference de leurs hauteurs.

SI l'on donne des noms en lettres à chacune des trois dimenſions de ces deux ſolides, comme vous voyez dans les deux figures ſuivantes, afin d'avoir une ſolution indefinie, la ſomme de leurs ſoliditez ſera $abx+cdy$, & la ſomme de leurs baſes ſera $ab+cd$, à l'égard des hauteurs exprimées par les deux lettres x, y. De même la difference de ces deux ſoliditez ſera $abx-cdy$, & la difference des hauteurs ſera $x-y$: de ſorte que ſelon les conditions de la Queſtion, l'on aura ces deux Equations à reſoudre,



$abx+cdy \propto ab+cd.$
$abx-cdy \propto x-y.$

dont la premiere donnera $ab+cd-cdy$, pour le ſolide abx, & la deuxiéme donne $x-y+cdy$, pour le même ſolide abx; d'où l'on tire cette troiſiéme Equation, $ab+cd-cdy \propto x-y+cdy$, dans laquelle on trouve $x \propto ab+cd+y-2cdy$, & au lieu de $abx \propto ab+cd-cdy$, l'on aura $aabb+abcd-2abcdy+aby \propto ab+cd-cdy$, & dans cette Equation l'on trouvera $y \propto \frac{aabb+abcd-ab-cd}{2abcd-ab-cd}$ c'eſt pourquoi au lieu de $x \propto ab+cd+y-2cdy$, l'on aura $x \propto \frac{ccdd+abcd-ab-cd}{2abcd-ab-cd}$. Ainſi le Problême ſera reſolu en nombres, ſi l'on reſtituë aux quatre lettres a, b, c, d, les nombres qu'elles repréſentent.

Si $a \propto 1$, $b \propto \frac{2}{3}$, $c \propto \frac{1}{2}$, $d \propto \frac{1}{3}$, l'on trouvera $x \propto \frac{25}{22}$, & $y \propto \frac{5}{11}$, &c.

PROBLEME

PROBLEME X.

Trouver deux nombres, dont la ſomme ſoit égale à un nombre donné, & dont la raiſon ſoit égale à celle de deux nombres donnez.

DEux perſonnes doivent partager entre eux, par exemple 120 piſtoles, avec cette condition, que l'un n'en aura que les deux tiers de l'autre, & l'on demande la part de chacun.

Pour la trouver, on voit qu'il n'y a qu'à partager le nombre donné 120 en deux autres, dont le plus petit ſoit au plus grand, comme 2 eſt à 3.

Si l'on met la lettre a pour le nombre donné 120, la lettre b pour le nombre donné 2, & la lettre c pour le nombre donné 3: & que l'on apelle x le plus petit des deux nombres qu'on cherche, & y le plus grand, afin d'avoir une ſolution générale; on aura ſelon les conditions de la Queſtion, cette Equation, $x+y \propto a$, & cette analogie, $x, y :: b, c$, & par conſéquent cette Equation, $cx \propto by$. Ainſi l'on aura ces deux Equations conditionnelles.

$$x+y \propto a.$$
$$cx \propto by.$$

Parce que dans la premiére $x+y \propto a$, l'on trouve $x \propto a-y$, en changeant x en $a-y$, la deuxiéme $cx \propto by$, ſe changera en celle-ci, $ac-cy \propto by$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{ac}{b+c}$, & au lieu de $x \propto a-y$, l'on aura $x \propto \frac{ab}{b+c}$. Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels, $\frac{ab,\ ac}{b+c}$.

A cauſe de $a \propto 120$, de $b \propto 2$, & de $c \propto 3$, les deux nombres qu'on demande, ſeront 48, 72; de ſorte que

la part d'une perſonne ſera de 48 piſtoles, & la part de l'autre perſonne ſera de 72 piſtoles.

On tire de cette ſolution générale, le canon ſuivant pour reſoudre ce Problême. *Si on multiplie ſéparément chaque terme de la raiſon donnée, par la ſomme donnée, & qu'on diviſe les deux produits chacun par la ſomme des deux mêmes termes, on aura les deux nombres qu'on cherche.*

PROBLEME XI.

Faire la monnoye d'un écu valant 60 ſols, en liards, & en ſols marquez valans 4 liards, en ſorte qu'il y ait autant de liards que de ſols marquez.

SI l'on met x pour le nombre des liards, qui doit auſſi être le nombre des ſols marquez, ce nombre de ſols marquez vaudra $4x$, parce que l'on ſuppoſe qu'un ſol marqué vaut 4 liards: & alors toutes les pieces de liards & de ſols marquez vaudront enſemble $5x$; & comme l'on ſuppoſe qu'elles font enſemble un Ecu valant 60 ſols, on aura cette Equation, $5x \propto 60$, dans laquelle on trouvera $x \propto 12$, pour le nombre des liards & des ſols marquez qu'on demande.

PROBLEME XII.

Trouver deux nombres tels que ſi l'on en donne 3 du ſecond au premier, la ſomme ſoit égale au reſte: & que ſi l'on en donne 3 du premier au ſecond, la ſomme ſoit double du reſte.

PAr exemple deux perſonnes en diſcourant enſemble, le premier dit au ſecond, ſi vous me donniez 3 de vos écus, j'en aurois autant que vous: & le ſecond dit au premier, ſi vous me donniez 3 de vos écus,

écus ; j'en aurois deux fois plus que vous. On demande le nombre des écus de châcun.

Si l'on met x pour le nombre des écus du premier, & y pour le nombre des écus du ſecond, en ſorte que les deux nombres qu'on cherche, ſoient x, y, l'on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces deux Equations à reſoudre,

$$x+3 \mathrel{)\!(} y-3.$$
$$y+3 \mathrel{)\!(} 2x-6.$$

Dans la premiere Equation, $x+3 \mathrel{)\!(} y-3$, l'on trouvera $x \mathrel{)\!(} y-6$, c'eſt pourquoi ſi l'on change x en $y-6$, la deuxiéme Equation conditionnelle ſe changera en celle-ci, $y+3 \mathrel{)\!(} 2y-18$, dans laquelle on trouvera $y \mathrel{)\!(} 21$, & au lieu de $x \mathrel{)\!(} y-6$, l'on aura $x \mathrel{)\!(} 15$. Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront 15, 21, c'eſt-à-dire que la prémiere perſonne avoit 15 écus, & la deuxiéme en avoit 21.

PROBLEME XIII.

Trouver quatre nombres en continuelle proportion arithmetique, dont on connoît l'excès & la ſomme.

PAr exemple un Courier a fait 120 lieuës en quatre jours de tems, en allant de Paris à Grenoble, & il a fait chaque jour deux lieuës moins que le précedent. On demande combien il a fait de lieuës chaque jour, ce qui ſera facile ſi l'on ſçait combien il en a fait le premier.

Pour le ſçavoir, il eſt évident qu'il n'y a qu'à *trouver quatre nombres en continuelle proportion arithmetique, dont la ſomme ſoit* 120, *& l'excès ſoit* 2.

Si l'on met a pour l'excès donné 2, & b pour la ſomme donnée 120, afin d'avoir une ſolution générale : & que l'on mette x pour le premier & plus grand

grand des quatre nombres qu'on cherche, les trois autres ſeront $x-a$, $x-2a$, $x-3a$, & la ſomme de ces quatre nombres ſera $4x-6a$, qui doit être égale au nombre donné b; c'eſt pourquoi l'on aura cette Equation, $4x-6a \gtrless b$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless \frac{6a+b}{4}$, & les quatre nombres qu'on demande, ſeront tels,

$$\frac{b+6a,\ b+2a,\ b-2a,\ b-6a}{4}$$

A cauſe de $a \gtrless 2$, & de $b \gtrless 120$, les quatre nombres qu'on cherche, ſeront 33, 31, 29, 27, qui font connoître que le Courier a fait 33 lieuës le premier jour, 31 le deuxiéme, 29 le troiſiéme, & 27 le quatriéme.

SECTION II.

Des Problêmes Plans.

IL eſt évident que la ſolution d'un Problême Plan peut être irrationnelle, parce que ſon Equation conſtitutive étant de deux dimenſions, châcune de ſes deux Racines en termes analytiques eſt irrationnelle, ce qui fait qu'en nombres elle ſe trouve rarement rationnelle, comme vous allez voir dans les Problêmes ſuivans, qui vous feront connoître que les deux Racines de l'Equation conſtitutive d'un Problême ne ſont pas toûjours utiles pour ſa reſolution.

PRO-

PROBLEME I.

Trouver deux nombres, dont la ſomme ſoit égale à un nombre donné, & dont le produit ſoit égal à la difference de leurs quarrez.

SI l'on apelle a le nombre donné, & que l'on mette x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, l'on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces deux Equations à reſoudre,

$$x+y \propto a.$$
$$xy \propto xx-yy.$$

Dans la premiere Equation, $x+y \propto a$, l'on trouvera $x \propto a-y$, ainſi en changeant x en $a-y$, la deuxiéme Equation conditionnelle $xy \propto xx-yy$, ſe changera en celle-ci, $ay-yy \propto aa-2ay$, ou $yy-3ay \propto -aa$, dont les deux Racines veritables, ſont $\frac{3a}{2}+\sqrt{\frac{5aa}{4}}$, $\frac{3a}{2}-\sqrt{\frac{5aa}{4}}$, pour y: mais la plus grande $\frac{3a}{2}+\sqrt{\frac{5aa}{4}}$ ne peut pas être d'uſage, parce qu'elle eſt plus grande que la ſomme donnée, a. Ainſi l'on prendra la plus petite $\frac{3a}{2}-\sqrt{\frac{5aa}{4}}$ pour y, & alors au lieu de $x \propto a-y$, l'on aura $x \propto -\frac{1a}{2}+\sqrt{\frac{5aa}{4}}$

Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{-1a+\sqrt{5aa}}{2}, \quad \frac{3a-\sqrt{5aa}}{2}.$$

Si $a \propto 2$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur, $\sqrt{5}-1$, $3-\sqrt{5}$.

PROBLEME II.

Trouver trois nombres en proportion Geometrique, dont les trois differences ſoient en proportion arithmetique.

SI l'on met x, y, z, pour les trois nombres qu'on cherche, l'on conſiderera que puiſque l'on veut que ces trois nombres ſoient en proportion geometrique, le produit des deux extrêmes ſera égal au quarré du moyen, c'eſt-à-dire que l'on aura cette Equation, $xz \propto yy$: & que de même puiſque l'on veut que leurs trois differences, $x-y$, $y-z$, $x-z$, ſoient en proportion arithmetique, la ſomme des deux extrêmes ſera double de la moyenne: de ſorte que l'on aura cette autre Equation, $-2x-y-z \propto 2y-2z$. Ainſi l'on aura ces deux Equations à reſoudre,

$$xz \propto yy.$$
$$2x-y-z \propto 2y-2z.$$

Dans la premiere Equation, $xz \propto yy$, l'on trouve $x \propto \frac{yy}{z}$, & dans la deuxiéme, $2x-y-z \propto 2y-2z$, l'on trouve le même $x \propto \frac{3y-z}{2}$; c'eſt pourquoi l'on aura cette troiſiéme Equation, $\frac{yy}{z} \propto \frac{3y-z}{2}$, ou $2yy-3yz+zz \propto 0$, laquelle étant diviſée par $y-z$, ſe reduit à celle-ci, $2y-z \propto 0$: où l'on trouve $2y$ pour z. Si donc on change z en $2y$, au lieu de $x \propto \frac{yy}{z}$, ou de $x \propto \frac{3y-z}{2}$ l'on aura $x \propto \frac{1}{2}y$: & ſi l'on ſuppoſe $y \propto 2$, l'on aura $x \propto 1$, & $z \propto 4$. Ainſi les trois nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur, 1, 2, 4.

PRO-

PROBLEME III.

Trouver trois nombres en proportion harmonique, dont les trois differences ſoient en proportion geometrique.

SI l'on met x, y, z, pour les trois nombres qu'on cherche; l'on conſiderera que puiſque l'on veut que ces trois nombres ſoient en proportion harmonique, le premier eſt au dernier, comme la difference des deux premiers, eſt à la difference des deux derniers, de ſorte que l'on a cette analogie, $x, z :: x-y, y-z$, & par conſéquent cette Equation, $xy-xz \propto xz-yz$. De même parce que l'on veut que les trois differences $x-y$, $y-z$, $x-z$, ſoient en proportion geometrique, le produit des deux extrêmes ſera égal au quarré de la moyenne, c'eſt-à-dire que l'on aura cette autre Equation, $xx-xz-xy+yz \propto yy-2yz+zz$. Ainſi nous avons ces deux Equations à reſoudre,

$$xy-xz \propto xz-yz.$$
$$xx-xz-xy+yz \propto yy-2yz+zz.$$

Dans la premiere Equation, $xy-xz \propto xz-yz$, l'on trouvera $x \propto \frac{yz}{2z-y}$, & dans la ſeconde $xx-xz-xy+yz \propto yy-2yz+zz$, l'on trouvera le même $x \propto \frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}\sqrt{5yy-10yz+5zz}$: c'eſt pourquoi l'on aura cette troiſiéme Equation, $\frac{yz}{2z-y} \propto \frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}\sqrt{5yy-10yz+5zz}$, & par l'antitheſe on aura celle-ci, $\frac{yy+yz-2zz}{4z-2y} \propto \frac{1}{3}\sqrt{5yy-10yz+5zz}$, laquelle étant délivrée de fractions & d'aſymmetrie, ſe reduit à celle-ci, $y^4-8y^3z+17yyzz-14yz^3+4z^4 \propto 0$, qui ſe peut éxactement diviſer par $yy-2yz+zz$, & il vient cette Equation plus baſſe, $yy-6yz+4zz \propto 0$;

$4zz \gtrless 0$, dont la plus petite Racine veritable eſt $3z - \sqrt{5zz}$, pour y. C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $z \gtrless 1$, l'on trouvera $y \gtrless 3 - \sqrt{5}$, & par conſéquent $x \gtrless \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}$. Ainſi les trois nombres qu'on cherche, ſeront en entiers de cette grandeur, $\sqrt{5} - 1, 6 - \sqrt{20}, 2$.

PROBLEME IV.

Trouver trois nombres en proportion geometrique, dont les trois differences ſoient en proportion harmonique.

SI l'on met x, y, z, pour les trois nombres qu'on demande, l'on conſiderera qu'afin que ces trois nombres ſoient en proportion geometrique, il faut rendre égal le produit des deux extrêmes au quarré du Moyen, par cette Equation, $xz \gtrless yy$: & que de même afin que leurs trois differences $x-y, y-z, x-z$, ſoient en proportion harmonique, il faut que la premiere ſoit à la derniere, comme la difference des deux premieres eſt à la difference des deux dernieres, c'eſt-à dire qu'il faut faire cette analogie, $x-y, x-z :: 2y-x-z, x-y$, & par conſéquent cette Equation, $xx-2xy+yy \gtrless 2xy-xx-2yz+zz$. Ainſi nous avons ces deux Equations à reſoudre,

$$xx-2xy+yy \gtrless 2xy-xx-2yz+zz.$$
$$xz \gtrless yy.$$

dont la premiere donne $z \gtrless y + \sqrt{2xx-4xy+2yy}$, & la deuxiéme donne le même $z \gtrless \frac{yy}{x}$, d'où l'on tire cette troiſiéme Equation, $y + \sqrt{2xx-4xy+2yy} \gtrless \frac{yy}{x}$, ou $yy - xy \gtrless \sqrt{2x^4-4x^3y+2xxyy}$, laquelle étant délivrée d'aſymmetrie, ſe reduit à celle-ci, $y^4-2xy^3+xxyy \gtrless 2x^4-4x^3y+2xxyy$, ou $y^4-2xy^3-xxyy+4x^3y-2x^4 \gtrless 0$, qui ſe peut diviſer éxactement par $yy-2xy+xx$, & il vient cette Equation plus baſſe, $yy-2xx \gtrless 0$, où l'on trouve

ve $y \gtrless \sqrt{2xx}$. C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $x \gtrless 1$, l'on trouvera $y \gtrless \sqrt{2}$, & par conſéquent $z \gtrless 2$. Ainſi les trois nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur, 1, $\sqrt{2}$, 2.

PROBLEME V.

Trouver quatre nombres en continuelle proportion arithmetique, dont l'excès & le Produit Plan-plan ſoient égaux à des nombres donnez.

SI l'on donne 4 pour l'excès, & 3465 pour le produit Plan-plan, & que l'on mette x pour le premier & plus petit des quatre nombres qu'on cherche, les trois autres ſeront tels, $x+4$, $x+8$, $x+12$, & leur produit Plan-plan ſera $x^4+24x^3+176xx+384x$, qui doit être égal au nombre donné 3465. Ainſi l'on aura cette Equation conſtitutive, $x^4+12x^3+176xx+384x \gtrless 3465$, dont la Racine veritable ſe trouvera en cette ſorte.

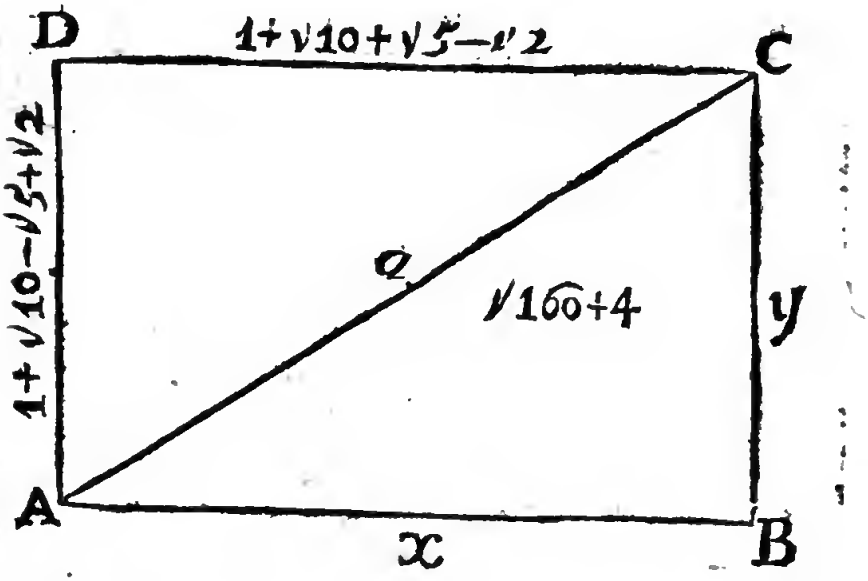
Parce qu'en prenant la Racine quarrée du Membre inconnu $x^4+12x^3+176xx+384x$, il reſte -256, vous ajoûterez ce reſte 256, qui eſt le quarré-quarré de l'excès donné 4, à chaque Membre de l'Equation, pour avoir cette autre Equation, $x^4+12x^3+176xx+384x+256 \gtrless 3721$, où prenant la Racine quarrée de châque Membre, l'on aura cette Equation plus baſſe, $xx+12x+16 \gtrless 61$, ou $xx+12x \gtrless 45$, à laquelle ſi l'on ajoûte de part & d'autre le quarré 36 de la moitié 6 du côté coëfficient 12, l'on aura cette autre Equation, $xx+12x+36 \gtrless 81$, où prenant encore la Racine quarrée de châque Membre, l'on aura cette derniere Equation, $x+6 \gtrless 9$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless 3$, pour le plus petit des quatre nombres qu'on cherche, leſquels par conſéquent ſeront de cette grandeur, 3, 7, 11, 15.

PRO-

PROBLEME VI.

Trouver les côtez d'un Parallelogramme rectangle, dont la Diagonale eſt connuë, & dont l'aire ſoit égale à ſon contour.

SI l'on donne par exemple, le nombre 6, que nous apellerons *a*, pour la Diagonale AC du Parallelogramme rectangle ſuivant ABCD, & que l'on mette la lettre *x* pour la longueur, AB, ou CD, & *y* pour la largeur AD, ou BC, l'on trouvera, *par* 47. 1. dans le Triangle rectangle ABC, cette Equation, $xx+yy \propto aa$: & parce que l'aire xy doit être



égale au contour $2x+2y$, l'on aura cette autre Equation $xy \propto 2x+2y$. Ainſi l'on aura ces deux Equations à reſoudre,

$$xx+yy \propto dd.$$
$$xy \propto 2x+2y.$$

Dans la premiere Equation, $xx+yy \propto aa$, l'on trou-

trouvera $y \propto \sqrt{aa-xx}$, & alors en changeant y en $\sqrt{aa-xx}$, la deuxiéme Equation $xy \propto 2x+2y$, ſe changera en celle-ci, $x\sqrt{aa-xx} \propto 2x+2\sqrt{aa-xx}$, où prenant le quarré de châque Membre, l'on aura cette autre Equation, $aaxx-x^4 \propto 4aa+8x\sqrt{aa-xx}$, & par l'antitheſe on aura celle-ci, $aaxx-x^4-4aa \propto 8x\sqrt{aa-xx}$, où prenant encore le quarré de châque Membre, l'on aura cette derniere Equation, $a^4x^4-2aax^6+x^8-8a^4xx+8aax^4+16a^4 \propto 64aaxx-64x^4$ ou $x^8-2aax^6+8aax^4+a^4x^4+64x^4-64aaxx \propto -16a^4$, qui eſt dérivative d'une Equation de quatre dimenſions, & que nous reſoudrons d'une maniere ſemblable à celle du Problême précedent, comme vous allez voir.

Parce qu'en prenant la Racine quarrée du Membre inconnu $x8\ 2aax^6+8aax^4+a^4x^4+64x^4-64aaxx$, il reſte $-16a^4-256aa-1024$, ſi l'on ajoûte ce reſte affecté d'un ſigne contraire, ſçavoir $16a^4+256aa+1024$, à châque Membre de l'Equation, l'on aura cette autre Equation, $x^8-2aax^6+8aax^4+a^4x^4+64x^4-64aaxx+16a^4+256aa+1024 \propto 256aa+1024$, où prenant la racine quarrée de châque Membre, l'on aura cette Equation plus baſſe, $x^4-aaxx+4aa+32 \propto \sqrt{256aa+1024}$, ou $-x^4+aaxx-4aa-32 \propto \sqrt{256aa+1024}$, & par l'antitheſe on aura celle-ci, $x^4-aaxx+4aa+32 \propto \sqrt{256aa+1024}$, ou $x^4-aaxx \propto 4aa-32-\sqrt{256aa+1024}$, qui eſt dérivative d'une Equation de deux dimenſions, & que par conſéquent on reſoudra de la même façon, comme vous allez voir.

Ajoûtez à chaque Membre de l'Equation précedente, le quarré $\frac{1}{4}a^4$ de la moitié $\frac{1}{2}aa$, du coëfficient aa, pour avoir cette autre Equation, $x^4-aaxx+\frac{1}{4}a^4 \propto \frac{1}{4}a^4-4aa-32-\sqrt{256aa+1024}$, où prenant la Racine quarrée de chaque Membre, l'on aura cette autre Equation plus baſſe, $xx-\frac{1}{2}aa \propto \sqrt{\frac{1}{4}a^4-4aa-32-\sqrt{256aa+1024}}$, ou $xx \propto \frac{1}{2}aa+\sqrt{\frac{1}{4}a^4-4aa-32-\sqrt{256aa+1024}}$, & par la Racine quarrée, l'on trouvera $x \propto 1+\sqrt{\frac{1}{4}aa+1+\sqrt{\frac{1}{4}aa-2-\sqrt{aa+4}}}$, pour la longueur AB, ou CD; c'eſt pourquoi la largeur AD, ou BC, ſera $1+\sqrt{\frac{1}{4}aa+1-\sqrt{\frac{1}{4}aa-2-\sqrt{aa+4}}}$.

A cauſe de $a \propto 6$, l'on aura $1+\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{2}$, pour la longueur AB, ou CD, & $1+\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{2}$, pour la largeur AD, ou BC, & l'aire & le contour vaudront chacun $\sqrt{160}+4$.

En changeant tant ſoit peu l'analyſe, au lieu d'une Equation dérivative, l'on aura une Equation ſimplement de quatre dimenſions, mais ſa reſolution en ſera plus difficile, parce qu'on ne pourra pas, comme la précedente, l'abaiſſer par la Racine quarrée, & alors il faudra recourir à la methode de Monſieur Deſcartes, comme vous allez voir.

Dans la premiere Equation, $xx+yy \propto aa$, l'on trouve $yy \propto aa-xx$, & dans la ſeconde $xy \propto 2x+2y$, l'on trouve $y \propto \frac{2x}{x-2}$, & par conſéquent $yy \propto \frac{4xx}{xx-4x+4}$: & parce que l'on a déja trouvé $yy \propto aa-xx$, l'on aura cette Equation, $aa-xx \propto \frac{4xx}{xx-4x+4}$, laquelle par l'antitheſe

titheſe & par l'iſomerie ſe reduit à celle-ci, $x^4-4x^3+8xx-aaxx+4aax-4aa \propto 0$, qui ne ſe peut pas abaiſſer par l'extraction de la Racine quarrée, c'eſt pourquoi il en faut ôter le ſecond terme, en ſuppoſant $x \propto z+1$, pour avoir cette autre Equation ſans ſecond terme, $z^4+2zz-aazz+8z+2aaz+5-aa \propto 0$, à la place de laquelle, on mettra ſelon les préceptes de Monſieur Deſcartes, que nous avons expliquez ailleurs, ces trois autres,

$$2zz\omega-2z\omega\omega+\omega^3+2\omega-aa\omega+8+2aa \propto 0.$$
$$2zz\omega+2z\omega\omega+\omega^3+2\omega-aa\omega-8-2aa \propto 0.$$
$$\omega^6+4a\omega^4-2aa\omega^4-16\omega\omega+a^4\omega\omega-64-32aa-4a^4 \propto 0.$$

dont la derniere ſe peut diviſer exactement par $\omega\omega-4-aa \propto 0$, ce qui donne $aa+4$ pour $\omega\omega$, & par conſéquent $\sqrt{aa+4}$ pour ω; & comme dans celle qu'on voudra des deux premieres des trois Equations précedentes, on trouve $z \propto \frac{1}{2}\omega+\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{4}{\omega}-\frac{aa}{\omega}-1-\frac{\omega\omega}{4}}$, ſi l'on met à la place de ω, ſa valeur trouvée $\sqrt{aa+4}$, l'on aura $z \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa+1}+\sqrt{\frac{1}{4}aa-2-\sqrt{aa+4}}$, & à cauſe de $x \propto z+1$, l'on aura $x \propto 1+\sqrt{\frac{1}{4}aa+1}+\sqrt{\frac{1}{4}aa-2-\sqrt{aa+4}}$, & par conſéquent $y \propto 1+\sqrt{\frac{1}{4}aa+1}-\sqrt{\frac{1}{4}aa-2-\sqrt{aa+4}}$, comme auparavant.

Mais on peut reſoudre ce Problême plus ſimplement, & par une ſeule Equation de deux dimenſions, en mettant $x+y$ pour la longueur AB, & $x-y$, pour la largeur AD, & alors on aura ces deux Equations à reſoudre,

$$2xx+2yy \gtrless aa.$$
$$xx-yy \gtrless 4x.$$

Dans la premiere Equation, $2xx+2yy \gtrless aa$, l'on trouvera $yy \gtrless \frac{1}{2}aa-xx$, & dans la ſeconde $xx-yy \gtrless 4x$, l'on trouvera le même $yy \gtrless xx-4x$, c'eſt pourquoi l'on aura cette troiſiéme Equation, $\frac{1}{2}aa-xx \gtrless xx-4x$, ou $xx-2x \gtrless \frac{1}{4}aa$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless 1+\sqrt{\frac{1}{4}aa+1}$, & alors au lieu de $yy \gtrless \frac{1}{2}aa-xx$, ou de $yy \gtrless xx-4x$, l'on aura $yy \gtrless \frac{1}{4}aa-2-\sqrt{aa+4}$, & par conſéquent $y \gtrless \sqrt{\frac{1}{4}aa-2-\sqrt{aa+4}}$, & les deux côtez AB, BC, ſe trouveront les mêmes qu'auparavant.

Remarque.

L'on a ici ſuppoſé $a \gtrless 6$, pour avoir des nombres entiers, & auſſi pour n'avoir point de Racine univerſelle, telle qu'eſt ici la valeur trouvée de y, ſçavoir $\sqrt{\frac{1}{4}aa-2-\sqrt{aa+4}}$, où vous voyez que pour déterminer la valeur de a, ou de la Diagonale AC, ſuivant les conditions que je viens de preſcrire, il faut rendre quarrée la puiſſance $\frac{1}{4}aa-2-\sqrt{aa+4}$, afin que l'on puiſſe mettre ſa veritable Racine quarrée à la place de $\sqrt{\frac{1}{4}aa-2-\sqrt{aa+4}}$.

Mais pour rendre quarrée cette puiſſance $\frac{1}{4}aa-2-\sqrt{aa+4}$, ou ce qui eſt la même choſe, pour en tirer la Racine quarrée, on la conſiderera comme un Binome, dont la partie rationnelle eſt $\frac{1}{4}aa-2$, & l'irrationnelle eſt $\sqrt{aa+4}$, & l'on ôtera le quarré $aa+4$ de cette partie irrationnelle, du quarré $\frac{1}{16}a^4-aa+4$, de la rationnelle

tionnelle, $\frac{1}{4}aa-2$, & l'on prendra la Racine quarrée du reſte $\frac{1}{16}a^4-2aa$, & parce que ce reſte n'a point de Racine quarrée, il eſt évident qu'il en aura une, ſi on le rend égal à un quarré. Ainſi nous avons cette puiſſance à égaler au quarré, $\frac{1}{16}a^4-2aa$.

Pour cette fin, multipliez-la par le nombre quarré $\frac{16}{aa}$, pour avoir en entiers, & en moins de dimenſions cette autre puiſſance à égaler au quarré, $aa-32$. Ce quarré doit contenir le quarré aa, afin que ce quarré aa ſe détruiſe, & qu'ainſi la valeur de la lettre a, ſe trouve rationnelle. C'eſt pourquoi l'on pourra prendre $a-b$ pour le côté de ce quarré, lequel par conſéquent ſera $aa-2ab+bb$. Si donc on ſuppoſe cette Equation, $aa-32 \propto aa-2ab+bb$, l'on trouvera $a \propto -\frac{b}{2}+\frac{16}{b}$.

Ainſi la valeur de a ſe trouve rationnelle, mais on veut encore, qu'elle ſoit un nombre entier, qui doit être pair, afin que les côtez du Rectangle ABCD, ſoient exprimez par des nombres entiers, à cauſe du quarré $\frac{1}{4}aa$, qui ſe rencontre dans leurs valeurs trouvées. Pour cette fin, il faut que chacun des deux Monomes qui compoſent la valeur trouvée de a, ſçavoir $\frac{b}{2}$, & $\frac{16}{b}$, ſoit un nombre pair, parce que la quantité b, doit meſurer 16, à cauſe de la fraction $\frac{16}{b}$, & que cette quantité b doit être neceſſairement un nombre pair, à cauſe de la fraction $\frac{b}{2}$, & de plus un nombre pairement pair, qui meſure exactement 16, ce nombre ne peut être que 4, ou que 8. Si donc on ſuppoſe $b \propto 4$. ou $b \propto 8$, l'on aura $\propto 6$ pour a, comme il a été ſuppoſé.

PROBLEME VII.

Trouver trois nombres, tels que le produit des deux premiers ſoit double du troiſiéme, que le produit des deux derniers ſoit triple du premier, & que le produit des deux extrêmes ſoit quadruple du moyen.

SI l'on met x, y, z, pour les trois nombres qu'on cherche, l'on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces trois Equations à reſoudre,

$$xy \propto 2z.$$
$$yz \propto 3x.$$
$$xz \propto 4y.$$

Dans la premiere Equation, $xy \propto 2z$, l'on trouvera $z \propto \frac{xy}{2}$, & dans la ſeconde $yz \propto 3x$, l'on trouvera le même $z \propto \frac{3x}{y}$; d'où l'on tire cette Equation, $\frac{xy}{2} \propto \frac{3x}{y}$ laquelle étant multipliée par $2y$, ſe reduit à celle-ci, $xyy \propto 6x$, où l'on trouve $y \propto \sqrt{6}$, pour le deuxiéme des trois nombres qu'on cherche, & au lieu de $z \propto \frac{xy}{2}$, ou de $z \propto \frac{3x}{y}$, l'on aura $z \propto \frac{3x}{\sqrt{6}}$, & enfin au lieu de la troiſiéme Equation conditionnelle, $xz \propto 4y$, on aura celle-ci, $\frac{3xx}{\sqrt{6}} \propto \sqrt{96}$, dans laquelle on trouvera $x \propto \sqrt{8}$, & alors au lieu de $z \propto \frac{3x}{\sqrt{6}}$, l'on aura $z \propto \sqrt{12}$. Ainſi les trois nombres qu'on cherche, ſeront tels, $\sqrt{8}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{12}$.

Remarque.

On auroit pû propoſer cette Queſtion plus généralement en cette ſorte; *trouver trois nombres tels que le produit des deux premiers ſoit multiple du troiſiéme par le nombre*

nombre donné a, que le produit des deux derniers ſoit multiple du premier par le nombre donné b, & que le produit des deux extrêmes ſoit multiple du moyen par le nombre donné c, & alors on aura ces trois Equations à reſoudre;

$$xy \mathrel{)\!(} az.$$
$$yz \mathrel{)\!(} bx.$$
$$xz \mathrel{)\!(} cy.$$

Dans la premiere Equation, $xy \mathrel{)\!(} az$, l'on trouvera $z \mathrel{)\!(} \frac{xy}{a}$, & dans la ſeconde $yz \mathrel{)\!(} bx$, on trouvera le même $z \mathrel{)\!(} \frac{bx}{y}$: c'eſt pourquoi l'on aura cette Equation, $\frac{xy}{a} \mathrel{)\!(} \frac{bx}{y}$, où l'on trouvera $y \mathrel{)\!(} \sqrt{ab}$, & au lieu de $z \mathrel{)\!(} \frac{xy}{a}$, ou de $z \mathrel{)\!(} \frac{bx}{y}$, l'on aura $z \mathrel{)\!(} \sqrt{\frac{bxx}{a}}$, & enfin au lieu de la troiſiéme Equation, $xz \mathrel{)\!(} cy$, on aura celle-ci, $\sqrt{\frac{bx^4}{a}} \mathrel{)\!(} \sqrt{abcc}$, dans laquelle on trouvera $x \mathrel{)\!(} \sqrt{ac}$: c'eſt pourquoi au lieu de $z \mathrel{)\!(} \sqrt{\frac{bxx}{a}}$, l'on aura $z \mathrel{)\!(} \sqrt{bc}$. Ainſi les trois nombres qu'on cherche, ſeront $\sqrt{ac}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{bc}$.

Si $a \mathrel{)\!(} 3$, $b \mathrel{)\!(} 4$; & $c \mathrel{)\!(} 5$, les trois nombres qu'on demande, ſeront $\sqrt{15}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$: mais ſi $a \mathrel{)\!(} 1$, $b \mathrel{)\!(} 4$, & $c \mathrel{)\!(} 9$, les trois nombres qu'on cherche, ſeront, 3, 2, 6. Par où l'on voit que la ſolution ne peut être rationnelle, que lorſque les multiples donnez ſeront ou des quarrez, ou des nombres plans ſemblables, afin que le produit de deux quelconques ſoit un nombre quarré.

PROBLEME VIII.

Trouver trois nombres, tels que le produit de deux quelconques ſoit égal à un nombre donné.

SI l'on met x, y, z, pour les trois nombres qu'on cherche, & qu'on veuille que le produit des deux premiers ſoit égal au nombre donné 6, que nous apellerons a, que le produit des deux derniers ſoit égal au nombre donné 12, que nous apellerons b, & que le produit des deux extrêmes ſoit égal au nombre donné 18, que nous apellerons c; l'on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces trois Equations à reſoudre,

$$xy \propto a.$$
$$yz \propto b.$$
$$xz \propto c.$$

Dans la premiere Equation, $xy \propto a$, l'on trouvera $x \propto \frac{a}{y}$, & dans la ſeconde $yz \propto b$, l'on trouvera $z \propto \frac{b}{y}$ & alors au lieu de la troiſiéme Equation conditionnelle, $xz \propto c$, on aura celle-ci, $\frac{ab}{yy} \propto c$, dans laquelle on trouvera $y \propto \sqrt{\frac{ab}{c}}$. C'eſt pourquoi au lieu de $x \propto \frac{a}{y}$ l'on aura $x \propto \sqrt{\frac{ac}{b}}$, & au lieu de $z \propto \frac{b}{y}$, l'on aura $z \propto \frac{bc}{a}$. Ainſi les trois nombres qu'on cherche, ſeront, $\sqrt{\frac{ac}{b}}$, $\sqrt{\frac{ab}{c}}$, $\sqrt{\frac{bc}{a}}$.

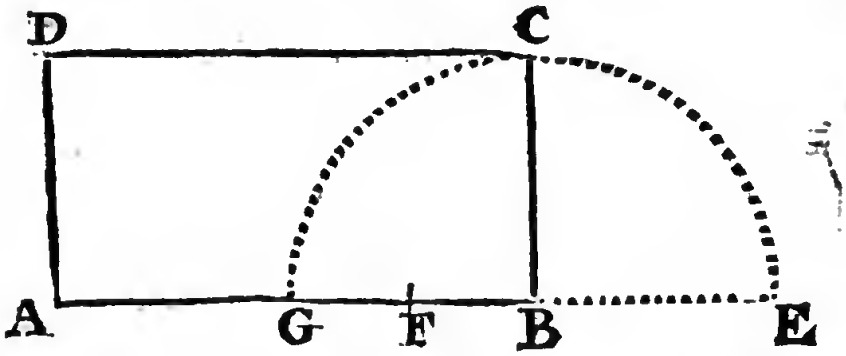
A cauſe de $a \propto 6$, de $b \propto 12$, & de $c \propto 18$, les trois nombres qu'on demande, ſeront tels, 3, 2, 6.

PROBLEME

PROBLEME IX.

Trouver deux nombres, dont la ſomme & le produit ſoient égaux à des nombres donnez.

C'Eſt comme ſi du Rectangle ABCD, l'on connoiſſoit l'aire & le contour, & qu'on voulût trou-



ver les deux côtez AB, BC, qui repréſenteront les deux nombres qu'on cherche, dont la ſomme ſera repréſentée par la moitié du contour.

Si donc on donne 42 pour le contour, que nous apellerons c, & 108 pour l'aire, que nous apellerons aa, la moitié de ce contour ſera 21, ou $\frac{c}{2}$, qui ſera la ſomme des deux côtez AB, BC, ou des deux nombres qu'on cherche.

C'eſt pourquoi ſi l'on met x pour l'un de ces deux côtez, l'autre côté ſera $\frac{c}{2}-x$, & ſi on les multiplie enſemble, on aura $\frac{cx}{2}-xx$, pour l'aire du Rectangle ABCD, & comme cette aire a été apellée aa, l'on aura cette Equation, $\frac{cx}{2}-xx \propto aa$, ou $xx-\frac{cx}{2} \propto -aa$, qui a deux Racines veritables, ſçavoir $\frac{c}{4}+\sqrt{\frac{cc}{16}-aa}$, $\frac{c}{4}-\sqrt{\frac{cc}{16}-aa}$, qui ſeront les deux côtez, ou les deux nombres qu'on cherche.

A cauſe de $aa \propto 108$, & de $c \propto 42$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront 12, 9, pour la longueur & pour la largeur du Rectangle ABCD.

Remarque

Remarque.

Ce Problême ſe peut reſoudre ſans Algebre, ſi après avoir prolongé la longueur AB, vers E, en ſorte que la partie BE ſoit égale à la largeur BC, pour avoir toute la ligne AE égale à la ſomme des deux côtez AB, BC, ou égale au nombre donné 21; l'on diviſe cette ligne AE, au point F, en deux parties égales AF, EF, dont chacune ſera par conſéquent égale à $\frac{21}{2}$.

Cette préparation étant faite, l'on conſiderera, que puiſque la ligne AE eſt diviſée en deux également au point F, & inégalement au point B, le Rectangle des deux parties inégales AB, BE, c'eſt-à-dire, le Rectangle ABCD, ou 108, avec le quarré de la partie interceptée BF, eſt, *par* 5. 2. égal au quarré $\frac{441}{4}$ de la moitié AF, ou EF, qui vaut $\frac{21}{2}$. C'eſt pourquoi ſi de 108 l'on ôte $\frac{432}{4}$, le reſte $\frac{9}{4}$ ſera le quarré de la partie interceptée BF, & par la Racine quarrée l'on trouvera $\frac{3}{2}$ pour cette partie BF, laquelle étant ajoûtée à la moitié AF, ou à $\frac{21}{2}$, l'on aura 12 pour la longueur AB, & étant ôtée de la moitié EF, ou de $\frac{21}{2}$, le reſte donnera 9, pour la ligne BE, c'eſt-à-dire, pour la largeur BC, qu'on demande.

Ou bien après avoir retranché de la longueur AB, la partie BG égale à la largeur BC, l'on conſiderera que la ligne AB, ayant été augmentée de la ligne BE égale à ſa partie BG, le quarré 441 de toute la ligne AE, qui vaut 21, eſt égal à quatre Rectangles ſous AB, BE, c'eſt-à-dire, au quadruple du Rectangle, ABCD, & au quarré de la ligne AG, *par* 8. 2. C'eſt pourquoi ſi de 441 l'on ôte 432, qui eſt le quadruple du Rectangle ABCD, le reſte 9 ſera le quarré de la ligne AG, ou de la difference des deux côtez AB, BC, laquelle par conſéquent vaudra 3. Si l'on ôte cette

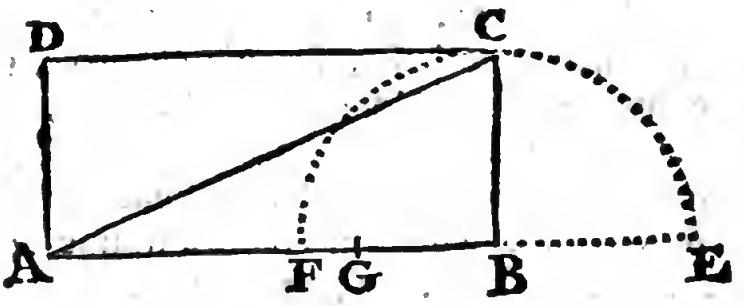
difference

difference AG, ou 3, de toute la ligne AE, ou de 21, il reſtera 18 pour la ligne EG, dont la moitié BE, ou BC, vaudra par conſéquent 9 : & ſi l'on ôte cette moitié BE, ou 9, de la ſomme AE, ou de 21, il reſtera 12 pour la ligne AB, comme auparavant.

PROBLEME X.

Trouver deux nombres, dont on connoît la ſomme, & auſſi la ſomme de leurs quarrez.

C'Eſt comme ſi du Rectangle ABCD, l'on connoiſſoit le contour, ou la ſomme des quatre



côtez ; & la Diagonale AC, & par conſéquent ſon quarré, ou *par* 47. 1. la ſomme des quarrez des deux côtez AB, BC, qui repréſenteront les deux nombres qu'on cherche, dont la ſomme ſera repreſentée par la moitié du contour.

Si donc on donne le nombre 46 pour le contour, que nous apellerons *c*, & le nombre 17 pour la Diagonale AC, que nous apellerons *d*; la moitié de ce contour ſera 23, ou $\frac{c}{2}$, qui ſera la ſomme des deux côtez, AB, BC, ou des deux nombres qu'on cherche: & le nombre 289, ou *dd*, ſera la ſomme des quarrez de ces deux nombres.

C'eſt

C'eſt pourquoi ſi l'on met x pour l'un de ces deux nombres, ou côtez AB, BC, l'autre ſera $\frac{c}{2}-x$, & la ſomme de leurs quarrez ſera $\frac{cc}{4}-cx+2xx$, qui doit être égale au ſecond nombre donné dd. Ainſi l'on aura cette Equation, $\frac{cc}{4}-cx+2xx \propto dd$, ou $xx-\frac{cx}{2} \propto \frac{dd}{2}-\frac{cc}{16}$, dont les deux Racines veritables ſont $\frac{c}{4}+\sqrt{\frac{dd}{2}-\frac{cc}{16}}$, $\frac{c}{4}-\sqrt{\frac{dd}{2}-\frac{cc}{16}}$, pour les deux côtez, ou pour les deux nombres qu'on cherche.

A cauſe de $c \propto 46$, & de $dd \propto 289$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront 15, 8, pour la longueur AB, & pour la largeur BC du Rectangle ABCD.

Remarque.

Ce Problême peut, comme le précedent, être reſolu par la ſeule Syntheſe, ſçavoir en prolongeant, comme auparavant, la longueur AB vers E, en ſorte que la ligne BE ſoit égale à la largeur BC, pour avoir toute la ligne AE égale à la ſomme des deux côtez AB, BC, ou égale au nombre donné 23 moitié du contour donné 46, & en raiſonnant de la ſorte.

Parce que le quarré de la ligne AE, ſçavoir 529, eſt *par* 4. 2. égal à la ſomme des quarrez, des deux lignes AB, BE, ou AB, BC, ou *par* 47. 1. au quarré 289 de la Diagonale AC, & au double Rectangle des deux mêmes lignes AB, BC, c'eſt-à-dire, au double du Rectangle ABCD; il s'enſuit que ſi du quarré 529, on ôte le quarré 289, la moitié 120 du reſte 240, ſera l'aire du Rectangle ABCD, laquelle étant ainſi connuë, avec la ſomme 23 des deux côtez AB, BC, ces deux côtez pourront être connus par le Problême précedent, ou bien en cette ſorte.

Ayant

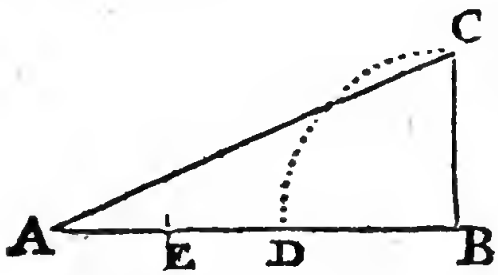
Ayant retranché de la longueur AB, la partie BF, égale à la largeur BC, pour avoir en AF, la difference des côtez AB, BC, l'on conſiderera que puiſque la ligne AB eſt coupée en F, la ſomme des quarrez de cette ligne AB, & de ſa partie BF, ou BD, c'eſt-à-dire le quarré de la Diagonale AC, *par* 47. 1. eſt, *par* 7. 2. égal au quarré de l'autre partie AF, & au double du Rectangle ſous les mêmes lignes AB, BF, c'eſt à-dire au Double Rectangle ABCD, ou à 240; c'eſt pourquoi ſi de 289, l'on ôte 240, il reſtera 49, pour le quarré de la ligne AF; laquelle par conſéquent vaudra 7. Ainſi ôtant cette ligne AF, ou 7, de la ligne AE, ou de 23, il reſtera 16 pour la ligne EF, dont la moitié BE, ou BC vaudra par conſéquent 8, comme auparavant, &c.

Ou bien encore, ayant diviſé la ligne AE en deux également au point G, auquel cas la moitié AG ou EG, vaudra $\frac{23}{2}$, & ſon quarré vaudra $\frac{529}{4}$; l'on conſiderera que puiſque *par* 9. 2. les quarrez des parties inégales AB, BE, ou AB, BC, ou, *par* 47. 1. le quarré 289 de la Diagonale AC, eſt double du quarré de la moitié AG, & du quarré de la ligne BG, ſi de 289 l'on ôte le double $\frac{529}{2}$ du quarré $\frac{529}{4}$ de la moitié AG, le reſte $\frac{49}{2}$ ſera le double du quarré de la ligne BG, lequel quarré par conſéquent vaudra $\frac{49}{4}$, dont la Racine quarrée donnera $\frac{7}{2}$ pour cette ligne BG, laquelle étant ajoûtée à la moitié AG, ou à $\frac{23}{2}$, l'on aura 15 pour le côté AB, & étant ôtée de la moitié EG, ou de $\frac{7}{2}$, le reſte donnera 8 pour l'autre côté BC, ou BE, comme auparavant.

PROBLEME XI.

Trouver deux nombres, dont la difference & le produit ſoient égaux à des nombres donnez.

C'Eſt comme ſi du Triangle ABC, rectangle en B, l'on connoiſſoit l'aire, & la difference des deux côtez AB, BC, & qu'on voulût trouver ces deux côtez, qui repréſenteront les deux nombres qu'on cherche, dont le produit ſera repréſenté par le double de l'aire du Triangle rectangle ABC, *par* 41. 1.



Si donc on donne 7 pour la difference des deux côtez AB, BC, que nous apellerons d, & 60 pour l'aire du Triangle ABC, que nous apellerons aa, ſon double $2aa$, ou 120 ſera le produit des deux nombres qu'on demande, ou des deux côtez AB, BC, que l'on trouvera en cette ſorte.

Si l'on met x pour l'un des deux côtez AB, BC, comme pour le plus petit BC, l'on aura $x+d$ pour le plus grand AB, & leur produit, ou le double de l'aire du Triangle ABC ſera $xx+dx$, qui doit être égal au ſecond nombre donné 120, ou $2aa$. Ainſi l'on aura cette Equation, $xx+dx \propto 2aa$, dont la Racine veritable eſt $\sqrt{2aa+\frac{dd}{4}}-\frac{d}{2}$, pour le plus petit côté BC, & à cauſe de $x+d$, l'on aura $\sqrt{2aa+\frac{dd}{4}}+\frac{d}{2}$ pour l'autre côté AB. Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels, $\sqrt{2aa+\frac{dd}{4}}-\frac{1}{2}d$, $\sqrt{2aa+\frac{dd}{4}}-\frac{d}{2}$.

A cauſe de $d \propto 7$, & de $aa \propto 60$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur, 15, 8.

Remarque.

Ce Problême ſe peut reſoudre ſans Algebre, ſi après avoir retranché du plus grand côté AB, la partie BD égale au plus petit BC, pour avoir en AD, la difference des deux côtez AB, BC; l'on diviſe cette difference AD, en deux parties égales AE, DE, dont chacune vaudra $\frac{7}{2}$, parce que la difference AD, vaut 7. Après quoi l'on raiſonnera en cette ſorte.

Parce que la ligne AD ſe trouve diviſée en deux également au point E, & que la ligne DB, lui eſt ajoûtée, l'on connoît, *par* 6. 2. que le Rectangle ſous toute la ligne AB, & l'ajoûtée BD, ou BC, c'eſt-à-dire le double de l'aire du Triangle ABC, ou 120, avec le quarré $\frac{49}{4}$, de la moitié AE, ou DE, ſçavoir $\frac{529}{4}$ eſt égal au quarré de la ligne BE compoſée de la moitié DE, & de l'ajoûtée BD, c'eſt pourquoi en prenant la Racine quarrée de $\frac{529}{4}$, l'on aura $\frac{23}{2}$ pour la ligne BE, de laquelle ſi l'on ôte la ligne DE, ou $\frac{7}{2}$, l'on aura 8 pour la ligne ajoûtée BD, ou pour le plus petit côté BC: & à laquelle ſi l'on ajoûte la ligne AE, ou $\frac{7}{2}$, l'on aura 15 pour le plus grand côté AB, comme auparavant.

PROBLEME XII.

Trouver deux nombres, dont on connoît la difference, & la ſomme de leurs quarrez.

C'Eſt comme ſi du Triangle ABC rectangle en B, de la figure précedente, l'on connoiſſoit la difference des deux côtez AB, BC, & l'Hypotenuſe AC,

&

& par conſéquent ſon quarré, ou, *par* 47. 1. la ſomme des quarrez des deux côtez AB, BC, qui repréſenteront les deux nombres qu'on cherche.

Si donc on donne 7, pour la difference de ces deux nombres, ou des deux côtez AB, BC, & 289 pour la ſomme de leurs quarrez, ou pour le quarré de l'Hypotenuſe AC, laquelle par conſéquent vaudra 17: & que l'on mette x pour le plus petit des deux nombres qu'on demande, ou pour le plus petit côté BC, le plus grand AB ſera $x+d$: & parce que la ſomme $2xx+2dx+dd$ de leurs quarrez, où la lettre d repréſente la difference donnée 7, doit être égale au ſecond nombre donné 289, que nous apellerons aa, l'on aura cette Equation conſtitutive, $2xx+2dx+dd \propto aa$, ou $xx+dx \propto \frac{aa-dd}{2}$, dont la Racine veritable eſt $\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{dd}{4}}-\frac{d}{2}$, pour le plus petit côté BC, c'eſt pourquoi au lieu de $x+d$, l'on aura $\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{dd}{4}}+\frac{d}{2}$, pour le plus grand côté AB. Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels, $\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{dd}{4}}-\frac{d}{2}$, $\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{dd}{4}}+\frac{d}{2}$.

A cauſe de $d \propto 7$, & de $aa \propto 289$, les deux nombres qu'on demande, ſeront de cette grandeur, 8, 15.

Remarque.

Ce Problême ſe peut auſſi reſoudre ſans Algebre, ſçavoir en faiſant une préparation ſemblable à la précedente, & en raiſonnant ainſi.

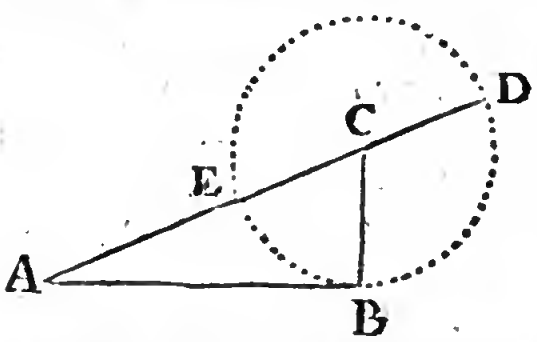
Parce que la ligne AD eſt diviſée en deux également au point E, & que la ligne BD, lui eſt ajoûtée, le quarré de toute la ligne AB, avec le quarré de l'ajoûtée BD, ou BC, c'eſt-à-dire, *par* 47. 1. le quarré de l'Hypotenuſe AC, ou 289, eſt, *par* 10. 2. double de

de la ſomme des quarrez des deux lignes AE, BE. C'eſt pourquoi ſi de 289 l'on ôte le double $\frac{49}{4}$ du quarré $\frac{49}{4}$ de la ligne AE, qui vaut $\frac{7}{2}$, comme étant la moitié de la ligne AD, qui vaut 7, il reſtera $\frac{49}{2}$ pour le double du quarré de la ligne BE, lequel par conſéquent vaudra $\frac{49}{4}$, dont la Racine quarrée $\frac{7}{2}$ ſera la valeur de la ligne BE, laquelle étant ainſi connuë, les deux côtez AB, BC, ou les deux nombres qu'on cherche, ſeront auſſi connus, comme vous avez vû au Problême précedent.

PROBLEME XIII.

Trouver deux nombres, dont on connoît la ſomme, & la difference de leurs quarrez.

C'Eſt comme ſi du Triangle ABC rectangle en B, l'on connoiſſoit le côté AB, par exemple de 15 pieds, & la ſomme de l'Hypotenuſe AC, & de l'autre côté BC, par exemple de 25 pieds, & qu'on voulût connoître le côté BC, & l'Hypotenuſe AC, qui repréſentent les deux nombres qu'on cherche, étant certain, *par* 47. 1. que la difference de leurs quarrez eſt égale au quarré 225 du coté AB, qui a été ſuppoſé de 15 pieds.



Si l'on met la lettre *a* pour ce nombre donné 15 du coté AB, & la lettre *b* pour l'autre nombre donné 25 de la ſomme de l'Hypotenuſe AC, & de l'autre coté BC, pour avoir une ſolution générale: & qu'on apelle *x* l'Hypotenuſe AC, ou le plus grand des deux

nombres qu'on cherche, l'autre nombre, ou le côté BC ſera $b-x$, & la difference des quarrez de ces deux nombres ſera $2bx-bb$, qui doit être égale au quarré 225, ou aa du côté AB. C'eſt pourquoi l'on aura cette Equation, $2bx-bb \mathrel{)\!(} aa$, dans laquelle on trouvera $x \mathrel{)\!(} \frac{aa+bb}{2b}$, pour l'Hypotenuſe AC, ou pour le plus grand des deux nombres qu'on cherche, & alors au lieu de $b-x$, l'on aura $\frac{bb-aa}{2b}$, pour le côté BC, ou pour l'autre nombre qu'on demande. Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels, $\frac{bb+aa}{2b}, \frac{bb-aa}{2b}$.

A cauſe de $a \mathrel{)\!(} 15$, & de $b \mathrel{)\!(} 25$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur, 17. 8.

Remarque.

Bien que ce Problême ne ſoit que ſimple, puiſque ſon Equation conſtitutive n'eſt que d'une dimenſion: neanmoins je n'ai pas laiſſé de le mettre au nombre des Problêmes plans, parce qu'il ſe peut reſoudre geometriquement comme s'il étoit plan, & que par là on le peut reſoudre en nombres ſans Algebre, comme vous allez voir.

Si l'on décrit du point C, comme centre, par le point B, la circonference du cercle BED, qui touchera en ce même point B, le côté AB, *par* 16. 3. & qui coupe ici l'Hypotenuſe AC, au point E, & qu'on prolonge cette Hypotenuſe AC juſqu'en D; toute la ligne AD, qui ſe trouve terminée en D, par la circonference du cercle BED, ſera de 25 pieds, parce qu'elle eſt la ſomme de l'Hypotenuſe AC, & du côté BC, que nous avons ſuppoſée d'autant. Or comme

comme, *par* 36. 3. le Rectangle des deux lignes AD, AE, eſt égal au quarré 225 de la touchante AB, qui a été ſuppoſée de 15 pieds, il s'enſuit que ſi l'on diviſe ce quarré 225 par 25, qui eſt la longueur de la ligne AD, l'on aura 9 pour la ligne AE, laquelle étant ôtée de AD, ou de 25, il reſtera 16 pour le Diametre DE, dont la moitié CE, ou le côté BC ſera par conſéquent 8 : & ſi l'on ajoûte cette moitié CE, à la ligne AE, c'eſt-à-dire 8 à 9, l'on aura 17, pour l'Hypotenuſe AC, comme auparavant.

SECTION III.

Des Problêmes Solides.

QUoique les Problêmes ſolides ne ſoient pas en nombres d'un uſage ſi ordinaire que les Plans, & que les ſimples : neanmoins je ne laiſſerai pas d'en mettre ici autant que dans les deux Sections précedentes, pour vous faciliter à leur imitation la maniere de reſoudre les autres qui peuvent venir dans le beſoin.

PROBLEME I.

Trouver deux nombres tels que le produit ſous leur ſomme & la ſomme de leurs quarrez, & le produit ſous leur difference & la difference de leurs quarrez, ſoient égaux à des nombres donnez.

SChooten reſou cette Queſtion en mettant $x+y$, & $x-y$, pour les deux nombres qu'on cherche, & Viete en mettant x pour leur ſomme : mais la reſolution en ſera plus naturelle, ſi l'on met x, y, pour ces deux nombres ; & alors ſi l'on veut que le produit ſolide ſous leur ſomme & la ſomme de leurs quarrez ſoit égal au nombre donné 715, que nous apel-

lerons a^3, & que le produit ſolide ſous leur difference & la difference de leurs quarrez ſoit égal au nombre donné 99, que nous apellerons b^3, l'on aura ſelon ces deux conditions ces deux Equations à reſoudre,

$$x^3+xxy+xyy+y^3 \propto a^3.$$
$$x^3-xxy-xyy+y^3 \propto b^3.$$

Si de la premiere Equation l'on ôte la deuxiéme, l'on aura cette troiſiéme Equation, $2xxy+2xyy \propto a^3-b^3$, & diviſant par 2, l'on aura cette quatriéme Equation, $xxy+xyy \propto \frac{a^3-b^3}{2}$, dont le ttiple donnera cette cinquiéme Equation, $3xxy+3xyy \propto \frac{3a^3-3b^3}{2}$. Mais ſi à la premiere Equation l'on ajoûte la deuxiéme, l'on aura cette ſixiéme Equation, $2x^3+2y^3 \propto a^3+b^3$, dont la moitié $x^3+y^3 \propto \frac{a^3+b^3}{2}$ fait connoître que la ſomme des cubes des deux nombres qu'on cherche, eſt égale à la moitié de la ſomme des deux nombres donnez.

Si l'on ajoûte cette moitié $x^3+y^3 \propto \frac{a^3+b^3}{2}$, à la cinquiéme Equation, $3xxy+3xyy \propto \frac{3a^3-3b^3}{2}$, l'on aura cette ſeptiéme Equation, $x^3+3xxy+3xyy+y^3 \propto 2a^3-b^3$, & par la Racine cubique l'on aura cette huitiéme Equation, $x+y \propto \sqrt[3]{2a^3-b^3}$, qui fait auſſi connoître, que la ſomme des deux nombres qu'on cherche, eſt pareillement connuë, puiſqu'elle eſt égale à $\sqrt[3]{2a^3-b^3}$.

Ainſi vous voyez que pour reſoudre ce Problême, il n'y a qu'à *trouver deux nombres, dont la ſomme & la ſomme de leurs cubes ſoient données*, ce qui ſe peut aiſément faire *par* 1. 4. *Dioph.* ou bien plus facilement en cette ſorte.

Divi-

Diviſez la moitié $x^3+y^3 \gtrless \frac{a^3+b^3}{2}$, de la ſixiéme Equation, par la huitiéme $x+y \gtrless \sqrt[3]{2a^3-b^3}$, pour avoir cette neuviéme Equation, $xx-xy+yy \gtrless \frac{a^3+b^3}{\sqrt[3]{2a^3-b^3}\cdot 2}$: & la quatriéme $xxy+xyy \gtrless \frac{a^3-b^3}{2}$ par la même huitiéme $x+y \gtrless \sqrt[3]{2a^3-b^3}$, pour avoir cette dixiéme Equation, $xy \gtrless \frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{2a^3-b^3}\cdot 2}$, par où l'on voit que le produit des deux nombres qu'on cherche eſt auſſi donné.

Puiſque donc l'on connoît la ſomme de ces deux nombres, ſçavoir $\sqrt[3]{2a^3-b^3}$, & leur produit, ſçavoir $\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{2a^3-b^3}\cdot 2}$, on les peut aiſément trouver *par Probl. 9.* de la Section précedente, ou bien plus facilement en cette ſorte.

Otez la dixiéme Equation, $xy \gtrless \frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{2a^3-b^3}\cdot 2}$, de la neuviéme $xx-xy+yy \gtrless \frac{a^3+b^3}{\sqrt[3]{2a^3-b^3}\cdot 2}$, pour avoir cette onziéme Equation, $xx-2xy+yy \gtrless \frac{b^3}{\sqrt[3]{2a^3-b^3}}$, & par la Racine quarrée l'on aura cette douziéme Equation, $x-y \gtrless \sqrt{\frac{b^3}{\sqrt[3]{2a^3-b^3}}}$, par laquelle on connoît que la difference des deux nombres qu'on cherche eſt auſſi connuë, ſçavoir $\sqrt{\frac{b^3}{\sqrt[3]{2a^3-b^3}}}$.

Ainſi connoiſſant la ſomme $\sqrt[3]{2a^3-b^3}$ de ces deux nombres, & leur difference $\sqrt{\frac{b^3}{\sqrt[3]{2a^3-b^3}}}$, l'on pourra

trouver la valeur de châcun par le canon du *Probl.* 1. *Sect.* 1. ou bien, ce qui revient au même, en cette ſorte.

Si à la huitiéme Equation, $x+y \propto \sqrt[3]{2a^3-b^3}$, l'on ajoûte, & qu'on ôte la douziéme, $x-y \propto \sqrt{\frac{b^3}{\sqrt[3]{2a^3-b^3}}}$, les moitiez de la ſomme & du reſte, donneront $x \propto \frac{1}{2}\sqrt[3]{2a^3-b^3}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^3}{\sqrt[3]{2a^3-b^3}}}$, & $y \propto \frac{1}{2}\sqrt[3]{2a^3-b^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^3}{\sqrt[3]{2a^3-b^3}}}$, pour les deux nombres qu'on cherche.

A cauſe de $a^3 \propto 715$, & de $b^3 \propto 99$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur 7, 4.

Remarque.

Parce qu'il s'agit ici d'une ſomme & d'une difference, & par conſéquent de deux nombres inégaux, on aura un calcul moins embaraſſé, ſi à l'imitation de Schooten, l'on met $x+y$, $x-y$, pour ces deux nombres, & alors on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces deux Equations à reſoudre,

$$4x^3+4xyy \propto a^3.$$
$$8xyy \propto b^3.$$

dont la ſeconde donne $\frac{b^3}{8x}$ pour yy, & alors la premiére ſe changera en celle-ci, $4x^3+\frac{1}{2}b^3 \propto a^3$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{1}{2}\sqrt[3]{2a^3-b^3}$, & au lieu de $yy \propto \frac{b^3}{8x}$, l'on aura $yy \propto \frac{b^3}{\sqrt[3]{2a^3-b^3}}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſe trouveront les mêmes qu'auparavant.

PROBLEME

PROBLEME II.

Trouver deux nombres tels que le ſolide ſous leur ſomme & la difference de leurs quarrez, & le ſolide ſous leur difference & la ſomme de leurs quarrez, ſoient égaux à des nombres donnez.

SI l'on veut que le ſolide ſous la ſomme des deux nombres qu'on cherche, & la difference de leurs quarrez, ſoit égal au nombre donné 128, que nous apellerons a^3, & que le ſolide ſous la difference des deux mêmes nombres, & la ſomme de leurs quarrez, ſoit égal au nombre donné $68 \propto b^3$, & que l'on mette x, y, pour les deux nombres qu'on cherche; l'on aura ſelon ces deux conditions les deux Equations ſuivantes à reſoudre, $x^3+xxy-xyy-y^3 \propto a^3$.

$x^3-xxy+xyy-y^3 \propto b^3$.

dont la deuxiéme étant ôtée de la premiere, l'on aura cette troiſiéme Equation, $2xxy-2xyy \propto a^3-b^3$, c'eſt pourquoi en diviſant par 2, l'on aura cette quatriéme Equation, $xxy-xyy \propto \frac{a^3-b^3}{2}$, dont le triple donne cette cinquiéme Equation, $3xxy-3xyy \propto \frac{3a^3-3b^3}{2}$.

Mais ſi l'on ajoûte la deuxiéme Equation à la premiere, l'on aura cette ſixiéme Equation, $2x^3-2y^3 \propto a^3+b^3$, dont la moitié $x^3-y^3 \propto \frac{a^3+b^3}{2}$ fait connoître, que la difference des cubes des deux nombres qu'on demande, eſt égale à la moitié de la ſomme des deux nombres donnez.

Si de cette moitié $x^3-y^3 \propto \frac{a^3+b^3}{2}$, l'on ôte la cinquiéme Equation, $3xxy-3xyy \propto \frac{3a^3-3b^3}{2}$, l'on aura cette ſeptiéme Equation, $x^3-3xxy+3xyy-y^3 \propto 2b^3-a^3$, & par la

Racine cubique l'on aura cette huitiéme Equation, $x-y \propto \sqrt[3]{2b^3-a^3}$, qui fait auſſi connoître que la difference des deux nombres qu'on cherche eſt pareillement donnée, puiſqu'elle eſt égale à $\sqrt[3]{2b^3-a^3}$.

Ainſi vous voyez, que pour reſoudre ce Problême, il n'y a qu'à *trouver deux nombres, dont la difference & la difference de leurs cubes ſoient données*, ce qui ſe peut aiſément faire *par* 2. 4. *Dioph.* ou bien plus facilement en cette ſorte.

Diviſez la moitié $x^3-y^3 \propto \frac{a^3+b^3}{2}$ de la ſixiéme Equation, par la huitiéme $x-y \propto \sqrt[3]{2b^3-a^3}$, pour avoir cette neuviéme Equation, $xx+xy+yy \propto \frac{a^3+b^3}{2\sqrt[3]{2b^3-a^3}}$, & auſſi la quatriéme, $xxy-xyy \propto \frac{a^3-b^3}{2}$, pour avoir cette dixiéme Equation, $xy \propto \frac{a^3-b^3}{2\sqrt[3]{2b^3-a^3}}$, qui fait connoître que le produit des deux nombres qu'on cherche, eſt auſſi donné.

Puiſque donc on connoît la difference de ces deux nombres, ſçavoir $\sqrt[3]{2b^3-a^3}$, & leur produit $\frac{a^3-b^3}{2\sqrt[3]{2b^3-a^3}}$, on les peut aiſément trouver par *Probl.* 11. de la Section précedente, ou bien plus facilement en cette ſorte.

Ajoûtez la dixiéme Equation, $xy \propto \frac{a^3-b^3}{2\sqrt[3]{2b^3-a^3}}$, à la neuviéme, $xx+xy+yy \propto \frac{a^3+b^3}{2\sqrt[3]{2b^3-a^3}}$, pour avoir cette onziéme Equation, $xx+2xy+yy \propto \frac{a^3}{\sqrt[3]{2b^3-a^3}}$, & par la Racine quarrée l'on aura cette douziéme Equation,

$x+y \propto$

$x+y \gtrless \sqrt[3]{\frac{a^3}{\sqrt{2b^3-a^3}}}$, par laquelle on voit que la ſomme des deux nombres qu'on cherche, eſt auſſi connuë, ſçavoir $\sqrt[3]{\frac{a^3}{\sqrt{2b^3-a^3}}}$.

Ainſi connoiſſant la ſomme $\sqrt[3]{\frac{a^3}{\sqrt{2b^3-a^3}}}$ de ces deux nombres, & leur difference $\sqrt[3]{2b^3-a^3}$, on les pourra connoître par le canon du *Probl.* 1. *Sect.* 1. ou bien, ce eſt qui la même choſe, en cette ſorte.

Si à la douziéme Equation, $x+y \gtrless \sqrt[3]{\frac{a^3}{\sqrt{2b^3-a^3}}}$, l'on ajoûte & qu'on ôte la huitiéme, $x-y \gtrless \sqrt[3]{2b^3-a^3}$, les moitiez de la ſomme & du reſte, donneront $x \gtrless \frac{1}{2}\sqrt[3]{2b^3-a^3}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^3}{\sqrt{2b^3-a^3}}}$, & $y \gtrless \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^3}{\sqrt{2b^3-a^3}}}+\sqrt[3]{2b^3-a^3}$, pour les deux nombres qu'on cherche.

A cauſe de $a^3 \gtrless 128$, & de $b^3 \gtrless 68$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur 5, 3.

Remarque.

Parce qu'il s'agit ici pareillement de la ſomme & de la difference, l'on pourra mettre, pour abreger le calcul, $x+y$, $x-y$, pour les deux nombres qu'on cherche, & alors ſelon les conditions de la Queſtion, l'on aura ces deux Equations à reſoudre,

$$4y^3+4xxy \gtrless b^3.$$
$$8xxy \gtrless a^3.$$

dont la deuxiéme donne $xx \gtrless \frac{a^3}{8y}$, & alors en changeant xx en $\frac{a^3}{8y}$, la premiere Equation, $4y^3+4xxy \gtrless b^3$,

ſe

ſe changera en celle-ci, $4y^3+\frac{1}{2}a^3 \gtrless b^3$, dans laquelle on trouvera $y \gtrless \frac{1}{2}\sqrt[3]{2b^3-a^3}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſe trouveront les mêmes qu'auparavant.

PROBLEME III.

Trouver deux nombres, tels que le ſolide ſous leur difference & le quarré du plus grand, ſoit égal au ſolide ſous leur ſomme & le quarré du plus petit.

SI l'on met x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, & que l'on prenne x pour le plus grand, leur difference ſera $x-y$, laquelle étant multipliée par le quarré xx du plus grand, on aura ce produit ſolide, x^3-xxy: & leur ſomme ſera $x+y$, laquelle étant multipliée par le quarré yy du plus petit, on aura cet autre produit ſolide, $xyy+y^3$; & comme l'on veut que ces deux ſolides ſoient égaux, on aura cette Equation, $x^3-xxy \gtrless xyy+y^3$, ou $x^3-xxy-xyy-y^3 \gtrless 0$, de laquelle il faut ôter le ſecond terme: & pour éviter les fractions, ſuppoſez $y \gtrless 3$, pour avoir cette autre Equation, $x^3-3xx-9x-27 \gtrless 0$, d'où l'on ôtera le ſecond terme en ſuppoſant $x \gtrless z+1$, car alors on aura cette autre Equation ſans ſecond terme, $z^3-12z-38 \gtrless 0$, dans laquelle on trouvera $z \gtrless \sqrt[3]{19+\sqrt{297}}+\sqrt[3]{19-\sqrt{297}}$: & alors au lieu de $x \gtrless z+1$, l'on aura $x \gtrless \sqrt[3]{19+\sqrt{297}}+\sqrt[3]{19-\sqrt{297}}+1$. Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels, $\sqrt[3]{19+\sqrt{297}}+\sqrt[3]{19-\sqrt{297}}+1$, 3.

Remarque.

On auroit pû propoſer ce Problême plus généralement en cette ſorte, *trouver deux nombres tels que le produit*

produit ſous leur difference & le quarré du plus grand, ſoit au produit ſolide ſous leur ſomme & le quarré du plus petit, en raiſon donnée: mais la reſolution n'en ſera pas plus difficile, car ſi les deux termes de la raiſon donnée ſont a, b, l'on aura cette analogie, x^3-xxy, $xyy+y^3$ :: a, b, & par conſéquent cette Equation conſtitutive, $bx^3-bxxy \propto axyy+ay^3$, ou $x^3-xxy-\frac{axyy}{b}-\frac{ay^3}{b} \propto 0$, que l'on reſoudra comme la précedente.

PROBLEME IV.

Trouver deux nombres, tels que le produit ſolide ſous le plus grand & le quarré de leur ſomme, ſoit égal au produit ſolide ſous le plus petit & le quarré de leur ſomme.

SI l'on met $x+y$, $x-y$, pour les deux nombres qu'on cherche, leur ſomme ſera $2x$, & leur difference ſera $2y$, & par conſéquent le quarré de leur ſomme ſera $4xx$, & le quarré de leur difference ſera $4yy$: & ſelon la condition de la Queſtion, l'on aura cette Equation conſtitutive, $4x^3-4xxy \propto 4xyy+4y^3$, ou $y^3+xyy+xxy-x^3 \propto 0$, d'où il faut ôter le ſecond terme: mais auparavant, afin d'éviter les fractions, ſuppoſez $x \propto 3$, pour avoir cette autre Equation, $y^3+3yy+9y-27 \propto 0$, de laquelle on ôtera le ſecond terme, en ſuppoſant $y \propto z-1$, car ainſi l'on aura cette Equation ſans ſecond terme, $z^3+6z-34 \propto 0$, dont la Racine veritable eſt $\sqrt[3]{\sqrt{297}+17}-\sqrt[3]{\sqrt{297}-17}$, pour z: & alors à cauſe de $y \propto z-1$, l'on aura $y \propto \sqrt[3]{\sqrt{297}+17}-\sqrt[3]{\sqrt{297}-17}-1$. Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur 3, $\sqrt[3]{\sqrt{297}+17}-\sqrt[3]{\sqrt{297}-17}-1$.

PROBLEME

PROBLEME V.

Trouver trois nombres en proportion arithmetique, dont l'excès, & le produit ſolide ſoient égaux à des nombres donnez.

SI l'on donne 3 pour l'excès, & 280 pour le produit ſolide, & que l'on mette x pour le premier & plus petit des trois nombres qu'on cherche, les deux autres ſeront $x+3$, $x+6$, & leur produit ſolide ſera $x^3+9xx+18x$, qui doit être égal au ſecond nombre donné 280. Ainſi l'on aura cette Equation, $x^3+9xx+18x \propto 280$, d'où il faut ôter le ſecond terme, en ſuppoſant $x \propto y-3$, & alors on aura cette autre Equation ſans ſecond terme, $y^3-9y \propto 280$, dans laquelle on trouvera $y \propto \sqrt[3]{\sqrt{19627}+140}+\sqrt[3]{\sqrt{19627}-140}$: & parce que la Racine cubique de $\sqrt{19627}+140$, eſt $\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{17}{4}}$, & que la Racine cubique de $\sqrt{19627}-140$, eſt $\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{17}{4}}$, l'on aura $y \propto 7$: c'eſt pourquoi à cauſe de $x \propto y-3$, l'on aura $x \propto 4$, & les trois nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur 4, 7, 10.

PROBLEME VI.

Trouver deux nombres, tels que leur produit, & la ſomme de leurs cubes, ſoient égaux à des nombres donnez.

SI l'on donne 8 pour le produit, que nous apellerons aa, & 72 pour la ſomme des cubes, que nous apellerons b^3, & que l'on mette x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, l'on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces deux Equations à reſoudre,

$$xy \propto aa.$$
$$x^3+y^3 \propto b^3.$$

dont

dont la premiere donnera $y \propto \frac{aa}{x}$, & par conſéquent $y^3 \propto \frac{a^6}{x^3}$, & alors la deuxiéme ſe changera en celle-ci, $x^3 + \frac{a^6}{x^3} \propto b^3$, ou $x^6 - b^3x^3 \propto \overline{a^6}$, qui eſt dérivative d'une Equation de deux dimenſions, & qui par conſéquent ſe reduira de la même façon, comme vous allez voir.

Ajoûtez à chaque Membre de l'Equation précedente, $x^6 - b^3x^3 \propto \overline{a^6}$, le quarré $\frac{1}{4}b^6$ de la moitié $\frac{1}{2}b^3$ du coëfficient b^3, pour avoir cette autre Equation, $x^6 - b^3x^3 + \frac{1}{4}b^6 \propto \frac{1}{4}b^6 - a^6$, où prenant la Racine quarrée de chaque Membre, on aura celle-ci, $x^3 - \frac{1}{2}b^3 \propto \sqrt{\frac{1}{4}b^6 - a^6}$, ou $x^3 \propto \frac{1}{2}b^3 + \sqrt{\frac{1}{4}b^6 - a^6}$, & par la Racine cubique l'on aura $x \propto \sqrt[3]{\frac{1}{2}b^3 + \sqrt{\frac{1}{4}b^6 - a^6}}$, & au lieu de $y \propto \frac{aa}{x}$, l'on aura $y \propto \sqrt[3]{\frac{1}{2}b^3 - \sqrt{\frac{1}{4}b^6 - a^6}}$, pour les deux nombres qu'on cherche.

A cauſe de $aa \propto 8$, & de $b^3 \propto 72$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur 4, 2.

PROBLEME VII.

Trouver deux nombres, dont le produit, & la difference de leurs cubes, ſoient égaux à des nombres donnez.

SI l'on donne 24 pour le produit, que nous apellerons aa, & 152 pour la difference des cubes, que nous apellerons b^3, & que l'on mette x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, l'on aura ſelon les conditions de la Queſtion, les deux Equations ſuivantes à reſoudre,

dont

$xy \gtrless aa.$

$x^3 - y^3 \gtrless b^3.$

dont la premiere donnera $\frac{aa}{x}$ pour y, & par conſéquent $\frac{a^6}{x^3}$ pour y^3, & alors au lieu de la ſeconde Equation, $x^3 - y^3 \gtrless b^3$, on aura celle-ci, $x^3 - \frac{a^6}{x^3} \gtrless b^3$, ou $x^6 - b^3x^3 \gtrless a^6$, qui étant dérivative d'une Equation de deux dimenſions, ſe reſoudra de la même façon, comme vous allez voir.

Ajoûtez donc à chaque Membre de l'Equation précedente, $x^6 - b^3x^3 \gtrless a^6$, le quarré $\frac{1}{4}b^6$ de la moitié $\frac{1}{2}b^3$ du coëfficient b^3, pour avoir cette autre Equation, $x^6 - b^3x^3 + \frac{1}{4}b^6 \gtrless a^6 + \frac{1}{4}b^6$, où prenant la Racine quarrée de chaque Membre, l'on aura celle-ci, $x^3 - \frac{1}{2}b^3 \gtrless \sqrt{a^6 + \frac{1}{4}b^3}$, ou $x^3 \gtrless \frac{1}{2}b^3 + \sqrt{a^6 + \frac{1}{4}b^6}$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless \sqrt[3]{\frac{1}{2}b^3 + \sqrt{a^6 + \frac{1}{4}b^6}}$, pour le plus grand des deux nombres qu'on cherche, & alors au lieu de $y \gtrless \frac{aa}{x}$, l'on aura $y \gtrless \sqrt[3]{\sqrt{a^6 + \frac{1}{4}b^6} - \frac{1}{2}b^3}$. Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur $\sqrt[3]{\sqrt{a^6 + \frac{1}{4}b^6} + \frac{1}{2}b^3}$, $\sqrt[3]{\sqrt{a^6 + \frac{1}{4}b^6} - \frac{1}{2}b^3}$.

A cauſe de $aa \gtrless 24$, & de $b^3 \gtrless 152$, les deux nombres qu'on demande, ſeront tels 6, 4.

PROBLEME

PROBLEME VIII.

Trouver deux nombres, tels que les ſolides ſous châcun & la ſomme de leurs quarrez, ſoient égaux à des nombres donnez.

SI l'on met x,y, pour les deux nombres qu'on cherche, & que l'on veüille que le ſolide ſous le premier x, & la ſomme $xx+yy$ de leurs quarrez, ſoit égal au nombre donné 170, que nous apellerons a^3; & que le ſolide ſous le ſecond y, & la même ſomme $xx+yy$, ſoit égal au nombre donné 102, que nous apellerons b^3; l'on aura ces deux Equations à reſoudre,

$$x^3+xyy \propto a^3.$$
$$y^3+xxy \propto b^3.$$

dont la premiere étant diviſée par x, l'on aura $\frac{a^3}{x}$ pour la ſomme $xx+yy$, & la deuxiéme étant diviſée par y, l'on aura $\frac{b^3}{y}$ pour la même ſomme $xx+yy$, d'où l'on tire cette troiſiéme Equation, $\frac{a^3}{x} \propto \frac{b^3}{y}$, ou $a^3y \propto b^3x$, dans laquelle on trouvera, $y \propto \frac{b^3x}{a^3}$, & au lieu de $xx+yy \propto \frac{a^3}{x}$, l'on aura $xx+\frac{b^6xx}{a^6} \propto \frac{a^3}{x}$, ou $a^6x^3+b^6x^3 \propto a^9$, où l'on trouvera $x \propto \frac{a^3}{\sqrt[3]{a^6+b^6}}$, & alors au lieu de $y \propto \frac{b^3x}{a^3}$ l'on aura $y \propto \frac{b^3}{\sqrt[3]{a^6+b^6}}$. Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels, $\frac{a^3,\ b^3}{\sqrt[3]{a^6+b^6}}$, par où l'on voit, que pour avoir ces deux nombres, il n'y a qu'à *diviſer châcun des deux nombres donnez par la Racine cubique de la ſomme de leurs quarrez.*

A cauſe

A cauſe de $a^3 \propto 170$, & de $b^3 \propto 102$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur 5, 2.

PROBLEME IX.

Trouver deux nombres, tels que les ſolides ſous chacun & la difference de leurs quarrez, ſoient égaux à des nombres donnez.

SI, comme auparavant, on met x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, & que l'on veüille que le ſolide ſous le premier x, que je ſuppoſe le plus grand, & la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, ſoit égal au nombre donné 80, que nous apellerons a^3, & que le ſolide ſous le ſecond y, & la même difference $xx-yy$, ſoit égal au nombre donné 48, que nous apellerons b^3, l'on aura ces deux Equations à reſoudre,

$$x^3-xyy \propto a^3.$$
$$xxy-y^3 \propto b^3.$$

dont la premiere étant diviſée par x, donnera $\frac{a^3}{x}$ pour la difference $xx-yy$, & la deuxiéme étant diviſée par y, donnera $\frac{b^3}{y}$ pour la même difference $xx-yy$, ce qui donne cette troiſiéme Equation, $\frac{a^3}{x} \propto \frac{b^3}{y}$, ou $a^3y \propto b^3x$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{b^3x}{a^3}$, & alors au lieu de $xx-yy \propto \frac{a^3}{x}$, l'on aura $xx-\frac{b^6xx}{a^6} \propto \frac{a^3}{x}$, ou $a^6x^3-b^6x^3 \propto a^9$, où l'on trouve $x \propto \frac{a^3}{\sqrt[3]{a^6-b^6}}$. C'eſt pourquoi au lieu de $y \propto \frac{b^3}{x}$, l'on aura $y \propto \frac{b^3}{\sqrt[3]{a^6-b^6}}$. Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels, $\frac{a^3}{\sqrt[3]{a^6-b^6}}, \frac{b^3}{\sqrt[3]{a^6-b^6}}$; par où

où l'on voit que pour trouver ces deux nombres, il n'y a qu'à *diviſer châcun des deux nombres donnez par la Racine cubique de la difference de leurs quarrez.*

A cauſe de $a^3 \propto 80$, & de $b^3 \propto 48$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur 5, 3.

PROBLEME X.

Trouver deux nombres, tels que les ſolides ſous châcun & le quarré de leur ſomme, ſoient égaux à des nombres donnez.

SI l'on met x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, & qu'on veüille que le ſolide ſous le premier x, & le quarré $xx+2xy+yy$ de leur ſomme $x+y$, ſoit égal au nombre donné 320, que nous apellerons a^3, & que le ſolide ſous le ſecond y, & le même quarré $xx+2xy+yy$, ſoit égal au nombre donné 192, que nous apellerons b^3, l'on aura les deux Equations ſuivantes à reſoudre,

$$x^3+2xxy+xyy \propto a^3.$$
$$y^3+2xyy+xxy \propto b^3.$$

dont la premiere étant diviſée par x, donne $\frac{a^3}{x}$ pour le quarré $xx+2xy+yy$, & la deuxiéme étant diviſée par y, donne $\frac{b^3}{y}$ pour le même quarré $xx+2xy+yy$, d'où l'on tire cette troiſiéme Equation, $\frac{a^3}{x} \propto \frac{b^3}{y}$, ou $a^3y \propto b^3x$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{b^3x}{a^3}$: c'eſt pourquoi au lieu de $xx+2xy+yy \propto \frac{a^3}{x}$, ou de $xx+2xy+yy \propto \frac{b^3}{x}$. l'on aura $xx+\frac{2b^3xx}{a^3}+\frac{b^6xx}{a^6} \propto \frac{a^3}{x}$, ou $a^6x^3+2a^3b^3x^3+b^6x^3 \propto a^9$, où l'on trouvera $x \propto \frac{a^3}{\sqrt[3]{a^6+2a^3b^3+b^6}}$. C'eſt

pourquoi au lieu de $y \propto \frac{b^3 x}{a^3}$, l'on aura $y \propto \frac{b^3}{\sqrt[3]{a^6+2a^3b^3+b^6}}$.

Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels, $\frac{a^3,\ b^3}{\sqrt[3]{a^6+2a^3b^3+b^6}}$, par où l'on voit que pour trouver ces deux nombres, *on doit diviſer châcun des deux nombres donnez par la Racine cubique du quarré de leur ſomme.*

A cauſe de $a^3 \propto 320$, & de $b^3 \propto 192$. les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur 5, 3.

PROBLEME XI.

Trouver deux nombres, tels que les ſolides ſous châcun & le quarré de leur difference, ſoient égaux à des nombres donnez.

SI l'on met x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, & qu'on veüille que le ſolide ſous le premier x, que je ſuppoſe le plus grand, & le quarré $xx-2xy+yy$ de leur difference $x-y$, ſoit égal au nombre donné 20, que nous apellerons a^3: & que le ſolide ſous le ſecond y, & le même quarré $xx-2xy+yy$, ſoit égal au nombre donné 12, que nous apellerons b^3, l'on aura ces deux Equations à reſoudre,

$$x^3-2xxy+xyy \propto a^3.$$
$$y^3-2xyy+xxy \propto b^3.$$

dont la premiere donne $\frac{a^3}{b^3}\frac{x}{y}$ pour le quarré $xx-2xy+yy$, & la deuxiéme donne $\frac{a^3}{x} \propto \frac{b^3}{y}$ pour le même quarré $xx-2xy+yy$, d'où l'on tire cette troiſiéme Equation, où l'on trouve $y \propto \frac{b^3 x}{a^3}$, & alors au lieu de $xx-2xy+yy \propto \frac{a^3}{x}$, l'on aura $xx-\frac{2b^3xx}{a^3}+\frac{b^6xx}{a^6} \propto \frac{a^3}{x}$, ou $a^6x^3-2a^3b^3x^3+$

$2a^3b^3x^3+b^6x^3 \propto a^9$, où l'on trouvera $x \propto \frac{a^3}{\sqrt[3]{x^6-2\ 3b^3+b^6}}$, pour le plus grand des deux nombres qu'on cherche: & au lieu de $y \propto \frac{b^3}{x}$, l'on aura $y \propto \frac{b^3}{\sqrt[3]{\ldots^6-23ab^3+b^6}}$. Ainſi les deux nombres qu'on demande, ſeront tels $\frac{a^3 \cdot b^3}{\sqrt[3]{x^6-2.3b^3+b^6}}$, que l'on trouve par conſéquent *en diviſant châcun des deux nombres donnez par la Racine cubique du quarré de leur difference.*

A cauſe de $a^3 \propto 20$, & de $b^3 \propto 12$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur 5, 3.

PROBLEME XII.

Trouver deux nombres, tels que le ſolide de ces deux nombres & de leur ſomme, & le ſolide des deux mêmes nombres & de leur difference, ſoient égaux à des nombres donnez.

SI l'on met x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, & qu'on veüille que le ſolide ſous ces deux nombres x, y, & leur ſomme $x+y$, ſoit égal au nombre donné 120, que nous apellerons a^3, & que le ſolide ſous ces deux mêmes nombres x, y, & leur difference $x-y$, ſoit égal au nombre donné 30, que nous apellerons b^3; l'on aura les deux Equations ſuivantes à reſoudre,

$$xxy+xyy \propto a^3.$$
$$xxy-xyy \propto b^3.$$

dont la ſomme & la difference donneront ces deux autres Equations,

$$2xxy \propto a^3+b^3.$$
$$2xyy \propto a^3-b^3.$$

Dans la premiere de ces deux, on trouvera $y \propto \frac{a^3+b^3}{2xx}$, & ſi l'on change y, en $\frac{a^3+b^3}{2xx}$, la deuxiéme Equation, $2xyy \propto a^3-b^3$, ſe changera en celle-ci, $\frac{a^6+2a^3b^3+b^6}{2x^3} \propto a^3-b^3$, ou $a^6+2a^3b^3+b^6 \propto 2a^3x^3-2b^3x^3$, où l'on trouvera $x \propto \sqrt[3]{\frac{a^6+2a^3b^3+b^6}{2a^3-2b^3}}$, & alors au lieu de $y \propto \frac{a^3+b^3}{2xx}$, l'on aura $y \propto \sqrt[3]{\frac{a^6-2a^3b^3+b^6}{2a^3+2b^3}}$. Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels, $\sqrt[3]{\frac{a^6+2a^3b^3+b^6}{2a^3-2b^3}}$, $\sqrt[3]{\frac{a^6-2a^3b^3+b^6}{2a^3+2b^3}}$, par où l'on connoît, que pour trouver ces deux nombres, *il faut diviſer le quarré de la ſomme des deux nombres donnez par le double de leur difference, & reciproquement le quarré de leur difference par le double de leur ſomme, & prendre la Racine cubique de chaque quotient.*

A cauſe de $a^3 \propto 120$, & de $b^3 \propto 30$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur, 5, 3.

PROBLEME XIII.

Trouver deux nombres tels que le ſolide ſous leur ſomme & le quarré de leur difference, & le ſolide ſous leur difference & le quarré de leur ſomme ſoient égaux à des nombres donnez.

SI l'on met x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, & qu'on veüille que le ſolide ſous leur ſomme $x+y$, & le quarré $xx-2xy+yy$ de leur difference, ſoit égal au nombre donné 32, que nous apellerons a^3: & que le ſolide ſous leur difference $x-y$, & le quarré $xx+2xy+yy$ de leur ſomme $x+y$, ſoit égal au nombre donné 128, que nous apellerons b^3, l'on aura ces deux Equations à reſoudre,

x^3-

$$x^3 - xxy - xyy + y^3 \propto a^3.$$
$$x^3 + xxy - xyy - y^3 \propto b^3.$$

Pour avoir un calcul plus aiſé, changez x en $\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\omega$, & y en $\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\omega$, pour avoir $x+y \propto z$, & $x-y \propto \omega$, & ainſi en changeant $x+y$ en z, & $x-y$ en ω, l'on aura ces deux autres Equations à reſoudre, dont la

$$z\omega\omega \propto a^3.$$
$$zz\omega \propto b^3.$$

premiere donnera $z \propto \frac{a^3}{\omega\omega}$, & alors au lieu de la ſeconde $zz\omega \propto b^3$, on aura celle-ci, $\frac{a^6}{\omega^3} \propto b^3$, dans laquelle on trouvera $\omega \propto \sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3}}$, & au lieu de $z \propto \frac{a^3}{\omega\omega}$, l'on aura $z \propto \sqrt[3]{\frac{b^6}{a^3}}$, & enfin au lieu de $x \propto \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\omega$, l'on aura $x \propto \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b^6}{a^3}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3}}$, & au lieu de $y \propto \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\omega$, l'on aura $y \propto \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b^6}{a^3}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3}}$, pour les deux nombres qu'on cherche, leſquels étant reduits en même Dénomination peuvent ſe repréſenter ainſi, $\frac{b^3+a^3,\ b^3-a^3}{\sqrt[3]{8a^3b^3}}$.

A cauſe de $a^3 \propto 32$, & de $b^3 \propto 128$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur, 5, 3.

Par cette ſolution générale, l'on connoît aiſément, que *ſi par le double de la Racine cubique du produit des deux nombres donnez on diviſe ſéparément leur ſomme & leur difference, on aura les deux nombres qu'on cherche.*

Sans qu'il ſoit beſoin de faire de nouvelles ſuppoſitions, on pourra ſe ſervir des deux premieres Equations, dont la ſomme & la difference donnent ces deux autres, dont la premiere donne $\frac{2x^3 - a^3 - b^3}{2x}$.

$$2x^3 - 2xyy \propto a^3 + b^3.$$
$$2y^3 - 2xxy \propto a^3 - b^3.$$

pour yy, & la deuxiéme donne $\frac{2xxy+a3-b3}{2y}$ pour le même yy, d'où l'on tire cette troiſiéme Equation, $\frac{2x3-a3-b3}{2x} \propto \frac{2xxy+a3-b3}{2y}$, ou $b^3x-a^3x \propto a^3y+b^3y$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{b3x-a3x}{b3+a3}$, & par conſéquent $yy \propto \frac{b^6xx-2a3b3xx+a^6xx}{b^6+2a3b3+a^6}$: & parce que l'on a déja trouvé $yy \propto \frac{2x3-a3-b3}{2x}$, l'on aura cette Equation, $\frac{2x3-a3-b3}{2x} \propto \frac{b^6xx-2a3b3xx+a^6xx}{b^6+2a3b3+a^6}$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{a3+b3}{3\sqrt{8a3b3}}$, comme auparavant.

CHAPITRE II.

Des Simples, des Doubles, & des Triples Egalitez: Pour la ſolution des Problêmes indéterminez en nombres rationnels.

COMME les plus belles ſolutions des Problêmes indéterminez qu'on propoſe dans les nombres, ſont celles qui ſe peuvent donner en nombres rationnels, ou exprimables: on voit aiſément que cela ſe fera ſans peine, lorſque le Problême ſera ſimple, c'eſt-à-dire lorſque dans l'Equation conſtitutive du Problême, la lettre inconnuë n'aura qu'une dimenſion, parce que la valeur de cette lettre inconnuë ſera toûjours rationnelle, ſi les quantitez données, & celles qui étant indéterminées peuvent être priſes comme données, ſont

ſont rationnelles, comme nous ſuppoſerons par tout, bien qu'il puiſſe arriver quelquefois que cette valeur ſoit rationnelle, quoi que toutes les quantitez données & indéterminées ne le ſoient pas.

Mais quand le Problême eſt Plan, Solide, &c. c'eſt-à-dire lorſque dans l'Equation conſtitutive du Problême, la lettre inconnuë a pluſieurs dimenſions, la valeur de la même lettre inconnuë étant irrationnelle, on la doit rendre rationnelle, en égalant ſa Puiſſance à une Puiſſance reguliere homogéne, en telle ſorte que la valeur de la lettre inconnuë, qui reſultera de cette Equation, ſoit rationnelle, ce qui arrivera, lorſque l'Equation étant reduite, la lettre inconnuë, dont on cherche la valeur, demeurera ſimple dans un ou pluſieurs termes avec une ſeule dimenſion. Lorſqu'on a une telle Puiſſance à reſoudre, cela ſe nomme *Simple Egalité*, & *Double Egalité* quand on en a deux à reſoudre, & lorſqu'on en a trois, cela s'apelle *Triple Egalité*. Lorſque dans la Puiſſance propoſée la lettre inconnuë, dont on cherche la valeur, n'aura qu'une dimenſion, on pourra toûjours égaler cette Puiſſance à telle autre Puiſſance reguliere qu'on voudra, ſans qu'il ſoit beſoin d'aucune précaution, pour faire que la valeur de la lettre inconnuë ſoit rationnelle, ſi ce n'eſt quelquefois pour rendre cette valeur affirmée, car dans les nombres on n'admet point de ſolutions negatives; & il ne ſera pas difficile de pourvoir à cet inconvenient, ſçavoir en faiſant une détermination conforme aux quantitez niées, qui ſe trouveront dans la valeur de la lettre inconnuë; qui eſt, qu'elles doivent être moindres que les affirmées, afin que la valeur de la lettre inconnuë ſoit auſſi affirmée.

lettre inconnuë, laquelle valeur changera la Puiſſance propoſée en une autre, qui aura ſa Racine quarrée, puiſqu'elle ſera la même que le quarré indéterminé qu'on lui a égalé.

Mais avant que de venir à la pratique, vous prendrez garde que nous mettrons les lettres x, y, z, w, pour les quantitez inconnuës; & les autres lettres de l'Alphabet indifferemment pour les quantitez connuës, & indéterminées, excepté la lettre l, qui repréſentera toûjours l'unité. Nous nous en ſervirons ſeulement, lorſqu'il s'agira de comparer enſemble deux quantitez de divers genre, comme un Plan avec un Solide, ou avec une autre grandeur plus ou moins élevée, afin que multipliant la grandeur moins élevée par l'unité l, ou diviſant la plus élevée par la même unité l, autant de fois qu'il ſera beſoin pour rendre Homogénes ces deux quantitez Heterogénes, on obſerve en cette façon la loi des Homogénes; & cette quantité qui aura été multipliée ou diviſée par l'unité l, ſera toûjours la même, parce que l'unité n'aporte point de changement dans la Multiplication, ni dans la Diviſion.

Puiſſance avec un ſeul terme.

Qu'il faille premierement égaler au quarré cette Puiſſance $2ax$, où il n'y a qu'un terme. Prenant à plaiſir le quarré indéterminé bb, & l'égalant à la Puiſſance propoſée $2ax$, par cette Equation, $2ax \propto bb$, on trouvera $x \propto \frac{bb}{2a}$, & ſubſtituant cette valeur à la place de x, la Puiſſance propoſée $2ax$ ſe changera en ce quarré bb, dont le côté eſt b.

Comme il eſt libre de prendre tel quarré qu'on voudra, pour l'égaler à la Puiſſance propoſée, on pourra faire que dans ce quarré celui de la lettre inconnuë ſe rençontre, après qu'il aura été multiplié, ou diviſé ſi l'on

l'on veut, par quelqu'autre quarré indéterminé, pour avoir une ſolution plus générale : & ſi le produit ou le quotient n'eſt pas homogene à la Puiſſance propoſée, on le pourra encore multiplier ou diviſer par quelqu'autre quarré indéterminé, qui rendra la ſolution encore plus générale.

Solution plus générale.

Ainſi pour égaler au quarré la Puiſſance propoſée $2ax$, on pourra prendre le quarré $\frac{bbxx}{cc}$, & faire cette Equation, $2ax \mathrel{)\!(} \frac{bbxx}{cc}$, dans laquelle on trouvera $x \mathrel{)\!(} \frac{2acc}{bb}$. Si donc à la place de x, on met ſa valeur trouvée $\frac{2acc}{bb}$, la Puiſſance propoſée $2ax$ ſe changera en celle-ci : $\frac{4aacc}{bb}$, dont la Racine quarrée eſt $\frac{2ac}{b}$.

Il eſt évident que cette ſolution eſt plus générale que la premiere, à cauſe des deux quantitez indéterminées b, c, que l'on peut prendre en nombres en une infinité de manieres differentes. Comme ſi l'on a, $a \mathrel{)\!(} 1$, & qu'on ſuppoſe $b \mathrel{)\!(} 2$, & $c \mathrel{)\!(} 3$, on trouvera $x \mathrel{)\!(} \frac{9}{2}$, & la Puiſſance propoſée $2ax$ ſe changera en ce quarré 9, dont le côté eſt 3. Mais ſi l'on ſuppoſe $b \mathrel{)\!(} \sqrt{2}$, & $c \mathrel{)\!(} \sqrt{8}$, ou $b \mathrel{)\!(} 1$, & $c \mathrel{)\!(} 2$, on trouvera $x \mathrel{)\!(} 8$, & la Puiſſance propoſée $2ax$ ſe changera en ce quarré 16, dont le côté eſt 4. Ainſi des autres.

Solution en entiers.

Si vous voulez une ſolution en entiers, c'eſt-à-dire ſi vous voulez que la valeur de la lettre inconnuë ſoit un entier, on égalera à l'unité le Dénominateur qui ſe trouvera dans la valeur de la lettre inconnuë, ou bien on le fera égal à une partie aliquote du Numerateur.

Ainſi

Ainſi dans la derniere valeur $-\frac{2acc}{bb}$ de la lettre inconnuë x, en ſuppoſant $bb \gtrless cc$, au lieu de $x \gtrless -\frac{2acc}{bb}$, on aura $x \gtrless 2a$, & au lieu de la Puiſſance propoſée $2ax$, on aura ce quarré $4aa$, dont le côté eſt $2a$. Ce qui manque ici, ſe trouvera dans l'exemple ſuivant.

Puiſſance avec deux termes qui n'en valent qu'un.

Qu'il faille maintenant égaler au quarré cette Puiſſance $ax+bx$, dont les deux termes n'en valent qu'un, parce que la lettre inconnuë ſe trouve dans chacun. Prenant un quarré à volonté, comme cc, on l'égalera à la Puiſſance propoſée $ax+bx$, par cette Equation, $ax+bx \gtrless cc$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless \frac{cc}{a+b}$. Si donc on met $\frac{cc}{a+b}$ à la place de x la Puiſſance propoſée $ax+bx$, ſe changera en ce quarré cc, dont le côté eſt c.

Solution en entiers.

Comme le quarré cc eſt indéterminé, & qu'il eſt libre de le prendre tel que l'on voudra, ſi l'on veut une ſolution en entiers, on doit prendre au lieu du quarré cc, un autre quarré qui ſe puiſſe diviſer par le Dénominateur $a+b$, ou par la quantité connuë qui multiplie l'inconnuë dans la Puiſſance propoſée : comme $aa+2ab+bb$, dont le côté eſt $a+b$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $ax+bx \gtrless aa+2ab+bb$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless a+b$, & au lieu de la Puiſſance propoſée $ax+bx$, on aura celle-ci, $aa+2ab+bb$, dont la Racine quarrée eſt $a+b$. Ce qui manque ici, ſe trouvera dans l'exemple ſuivant.

Puiſſance avec deux termes. Détermination.

Qu'il faille encore égaler au quarré cette Puiſſance, $ax+ab$, qui eſt compoſée de deux termes. Prenant par

par la regle générale, le quarré indéterminé cc, & l'égalant à la Puiſſance propoſée $ax+ab$, par cette Equation, $ax+ab \mathrel{)\!(} cc$, on trouvera $x \mathrel{)\!(} \frac{cc-ab}{a}$, où l'on voit qu'afin que la quantité inconnuë x ſoit affirmée, le quarré indéterminé cc doit être plus grand que ab, à cauſe du Numerateur $cc-ab$. C'eſt pourquoi on aura $c \oplus \surd ab$. Si donc à la place de x, on met ſa valeur trouvée $\frac{cc-ab}{a}$, la Puiſſance propoſée $ax+ab$, ſe changera en celle-ci, cc, dont la Racine quarrée eſt c.

Solution en entiers.

Si l'on veut une ſolution en entiers, quand cela eſt poſſible, on travaillera comme il a été dit dans l'exemple précedent, ou bien, ce qui eſt la même choſe, on reduira la Puiſſance propoſée en deux parties aliquotes, ſi elle en a deux, & on les égalera enſemble par une Equation, dans laquelle on trouvera la valeur de la lettre inconnuë en entiers, puiſque la quantité connuë qui la multiplie dans la Puiſſance propoſée meſure exactement l'autre terme.

Ainſi comme il arrive que la Puiſſance propoſée $ax+ab$, a ces deux parties aliquotes a, $x+b$, que nous apellerons deſormais *les deux nombres produiſans*, on fera cette Equation $a \mathrel{)\!(} x+b$, dans laquelle on trouvera $x \mathrel{)\!(} a-b$, où l'on voit que la quantité a doit être plus grande que la quantité b. Si donc à la place de x, on met ſa valeur trouvée $a-b$, la Puiſſance propoſée $ax+ab$, ſe changera en ce quarré aa, dont le côté eſt a.

De même pour égaler au quarré cette Puiſſance $ax+bx+aa-bb$, dont les deux nombres produiſans ſont $a+b$, $x+a-b$, on fera cette Equation,

$a+b$

$a+b$ ∞ $x+a-b$, dans laquelle on trouvera x ∞ $2b$, & mettant $2b$ à la place de x, au lieu de la Puiſſance propoſée $ax+bx+aa-bb$, on aura celle-ci, $aa+2ab+bb$, dont la Racine quarrée eſt $a+b$.

Solution plus générale.

Si vous ne voulez pas une ſolution en entiers, vous en pourrez avoir une plus générale, en donnant aux deux nombres produiſans $a+b$, $x+a-b$, la raiſon de deux quarrez indéterminez, comme cc, dd, par cette analogie, $a+b$, $x+a-b$:: cc, dd, d'où l'on tire cette Equation, $add+bdd$ ∞ $ccx+acc-bcc$, dans laquelle on trouvera x ∞ $\frac{bcc-acc+add+bdd}{cc}$, & la Puiſſance propoſée $ax+bx+aa-bb$, ſe changera en ce quarré $\frac{aadd+2abdd+bbdd}{cc}$, dont le côté eſt $\frac{ad+bd}{cc}$, qui donnera une ſolution en entiers, en prenant c pour l'unité.

Cette methode pour égaler au quarré une Puiſſance par le moyen de ſes deux nombres produiſans, eſt très-feconde, & de grand uſage pour les Puiſſances quarrées, qui n'ont aucun terme quarré, comme vous verrez dans la ſuite. Sa démonſtration eſt évidente à celui qui ſçait qu'un quarré eſt produit par la Multiplication de deux quantitez égales. Il y peut arriver une difficulté, que nous reſoudrons dans le Problême ſuivant.

PROBLEME II.

Egaler au quarré une Puiſſance, où la lettre inconnuë a deux dimenſions.

POur rendre quarrée une Puiſſance, où la quantité inconnuë monte au ſecond degré, elle ne doit pas

pas avoir moins de deux termes, & elle n'en peut pas avoir plus de trois.

Puiſſance qui contient la lettre inconnuë dans tous ſes termes.

Premierement ſi la lettre inconnuë ſe trouve dans tous les termes de la Puiſſance propoſée, on pourra toûjours rendre quarrée cette Puiſſance, en l'égalant à un quarré indéterminé, dans lequel celui de la lettre inconnuë ſe rencontre.

Ainſi pour rendre quarrée cette Puiſſance, $abxx-a^3x$, qui contient la lettre inconnuë dans chacun de ſes deux termes, on l'égalera au quarré $ccxx$, par cette Equation, $abxx-a^3x \propto ccxx$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{a^3}{ab-cc}$, où l'on voit que le quarré indéterminé cc doit être moindre que le Plan ab, ſi l'on veut que la quantité x ſoit affirmée. Si donc à la place de x, on met ſa valeur trouvée $\frac{a^3}{ab-cc}$, la Puiſſance propoſée $abxx-a^3x$ ſe changera en ce quarré, $\frac{a^6cc}{aabb-2abcc+c^4}$, dont le côté eſt $\frac{a^3c}{ab...cc}$.

Solution plus générale.

On peut donner une ſolution plus générale, parce que la Puiſſance propoſée $abxx-a^3x$, a ces deux nombres produiſans ax, $bx-aa$, auſquels on donnera la raiſon des deux quarrez indéterminez cc, dd, par cette analogie, ax, $bx-aa :: cc$, dd, d'où l'on tire cette Equation, $addx \propto bccx-aacc$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{aacc}{bcc-add}$, & la Puiſſance propoſée $abxx-a^3x$, ſe changera en ce quarré, $\frac{a^6.cdd}{bbc^4-2abccdd+aad^4}$ dont le côté eſt $\frac{a^3cd}{bcc...add}$.

Puiſſance

Puiſſance avec trois termes, qui n'en valent que deux.

Qu'il faille maintenant égaler au quarré cette Puiſſance, $abxx-aabx-aacx$, qui contient la lettre inconnuë dans tous ſes termes, qui n'en valent que deux, les deux $aabx$, $aacx$, paſſant pour un ſeul, parce que la lettre inconnuë s'y trouve dans un même dégré; ſi on l'égale au quarré $ddxx$, par cette Equation, $abxx-aabx-aacx \propto ddxx$, on trouvera $x \propto \frac{aab+aac}{ab-dd}$ où l'on voit qu'afin que la quantité x ſoit affirmée, le quarré dd doit être moindre que le Plan ab, & que par conſéquent on a $d \ominus \surd ab$. Si donc à la place de x, on met ſa valeur trouvée $\frac{aab+aac}{ab-dd}$, la Puiſſance propoſée $abxx-aabx-aacx$, ſe changera en ce quarré, $\frac{a^4bbdd+2a^4bcdd+a^4ccdd}{aabb-2abdd+d^4}$, dont le côté eſt $\frac{aabd+aacd}{ab...dd}$.

Solution plus générale.

Parce que la Puiſſance propoſée $abxx-aabx-aacx$, a ces deux nombres produiſans ax, $bx-ab-ac$, on en pourra donner une ſolution plus générale par une methode ſemblable à la précedente, ſçavoir en donnant à ces deux nombres produiſans la raiſon de deux quarrez indéterminez, comme des deux quarrez dd, mm, par cette analogie, ax, $bx-ab-ac :: dd$, mm, d'où l'on tire cette Equation, $ammx \propto bddx - abdd - acdd$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{abdd+acdd}{bdd-amm}$ & la Puiſſance propoſée $abxx-aabx-aacx$, ſe changera en ce quarré $\frac{a^4bbddmm+2a^4bcddmm+a^4ccddmm}{bbd^4-2abddmm+aam^4}$ dont le côté eſt $\frac{aabdm+aacdm}{bdd...amm}$.

Puiſſance

Puiſſance où le premier terme eſt quarré.

On peut autrement égaler au quarré une ſemblable puiſſance, lorſque le premier terme, c'eſt à-dire, celui où le quarré de la lettre inconnuë ſe rencontre, eſt quarré: ſçavoir en prenant pour le côté du quarré qu'on doit égaler à la puiſſance propoſée, la Racine quarrée de ce premier terme, augmentée ou diminuée de quelque quantité indéterminée, afin que ce quarré détruiſe celui de la lettre inconnuë, & qu'ainſi la valeur de la même lettre inconnuë ſe trouve rationnelle.

Comme pour égaler au quarré cette puiſſance, $aaxx+abbx$, dont le premier terme $aaxx$ a ſa Racine quarrée ax, on prendra $ax...cd$ pour le côté de ce quarré lequel par conſéquent ſera $aaxx-2acdx+ccdd$, tellement qu'on aura cette Equation, $aaxx+abbx \propto aaxx-2acdx+ccdd$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{ccdd}{abb+2acd}$, & la puiſſance propoſée $aaxx+abbx$, ſe changera en ce quarré $\frac{c^4d^4+2bbc^3d^3+b^4ccdd}{b^4+4bbcd+4ccdd}$, dont la Racine quarrée eſt $\frac{ccdd+bbcd}{bb+2cd}$.

Nous avons plûtôt pris le côté $ax...cd$, que $ax+cd$, pour avoir une ſolution ſans détermination: car ſi l'on avoit pris $ax+cd$, pour le côté du quarré qu'on doit égaler à la puiſſance propoſée $aaxx+abbx$, on auroit trouvé $x \propto \frac{ccdd}{abb-2acd}$, où l'on voit que le Solide abb doit être plus grand que le Solide $2acd$, & par conſéquent $b \oplus \sqrt{2cd}$, ou $cd \ominus \frac{1}{2}bb$.

Puiſſance qui a un troiſiéme terme.

On ſe ſervira de la même methode, pour rendre quarrée une puiſſance, qui n'aura pas la lettre inconnuë mêlée dans tous ſes termes, c'eſt-à-dire, qui aura un

un troiſiéme terme, pourvû que le premier terme ſoit quarré, car autrement on ne pourroit pas le détruire, ce qui eſt neanmoins neceſſaire, pour faire que la valeur de la lettre inconnuë ſe trouve rationnelle, lorſque le troiſiéme terme n'eſt pas quarré: car quand il ſera quarré on pourra auſſi le détruire ſans faire évanouïr le premier, pour avoir une ſolution rationnelle, ce qui fait voir que dans ce cas il n'eſt pas neceſſaire que le premier terme ſoit quarré, & que pour reſoudre une ſemblable puiſſance, il ſuffit que le premier, ou bien le dernier terme ſoit quarré, comme vous allez voir dans l'exemple ſuivant.

Pour égaler au quarré cette puiſſance $xx+2ax+bb$, en prenant $x...c$ pour le côté de ce quarré, lequel par conſéquent ſera $xx-2cx+cc$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $xx+2ax+bb \propto xx-2cx+cc$, on trouvera $x \propto \frac{cc-bb}{2a+2c}$, où l'on voit que b doit être moindre que c; & ſi à la place de x on met ſa valeur trouvée $\frac{cc-bb}{2a+2c}$, la puiſſance propoſée $xx+2ax+bb$ ſe changera en celle-ci, $\frac{b^4+4abbc+4aacc+2bbcc+4ac^3+c^4}{4aa+8ac+4cc}$, dont la Racine quarrée eſt $\frac{bb+2ac+cc}{2a+2c}$.

Comme il arrive ici que le troiſiéme terme bb eſt quarré, on peut autrement égaler au quarré la puiſſance propoſée $xx+2ax+bb$, ſçavoir en prenant pour le côté de ce quarré la Racine quarrée du troiſiéme terme, augmentée ou diminuée de la lettre inconnuë priſe autant de fois que l'on voudra: comme $b...\frac{cx}{d}$, & l'on aura cette Equation, $xx+2ax+bb \propto bb-\frac{2bcx}{d}+\frac{ccxx}{dd}$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{2add+2bcd}{cc-2dd}$, où l'on

voit que des deux grandeurs indéterminées c, d, la premiere c doit être plus grande que $\surd 2dd$. Si donc à la place de x, on met ſa valeur trouvée $\frac{2add+2bcd}{cc-2dd}$, la puiſſance propoſée $xx+2ax+bb$ ſe changera en celle-ci, $\frac{bbc^4+4bbcdd+4bbd^4+4abc^3d+8abcd^3+4aaccdd}{c^4-4ccdd+4d^4}$, dont la Racine quarrée eſt $\frac{bcc+2bdd+2acd}{cc...2dd}$.

Puiſſance où le ſecond terme manque.

C'eſt de la même façon que l'on rendra quarrée une puiſſance qui n'aura point de ſecond terme, pourvû que l'un des deux autres ſoit quarré. Comme pour égaler au quarré cette puiſſance $xx-ab$, on prendra $x...c$ pour le côté de ce quarré, & l'on trouvera $x \propto \frac{ab+cc}{2c}$: & pour égaler au quarré celle-ci, $abxx+aabb$, on prendra $ab...cx$ pour le côté de ce quarré, & l'on trouvera $x \propto \frac{2abc}{cc-ab}$, où l'on voit que c doit être plus grand que $\surd ab$.

Puiſſance qui n'a aucun terme quarré.

Si le premier & le troiſiéme terme ne ſont point quarrez, on reduira la puiſſance propoſée en une autre, dont le troiſiéme terme ſoit quarré, ce qui ſera toûjours poſſible, pourvû que la ſomme des unitez ſoit un nombre quarré, & que dans la puiſſance propoſée il n'y ait qu'une même lettre connuë.

Comme s'il eſt propoſé de rendre quarrée cette puiſſance, $2xx+3ax-aa$, où la ſomme des unitez fait le nombre quarré 4, dont le côté eſt 2; on ſuppoſera $x \propto y+a$, & mettant $y+a$ à la place de x, & $yy+2ay+aa$ à la place de xx, on aura cette autre puiſſance à égaler au quarré $2yy+7ay+4aa$, dont le dernier terme $4aa$ a ſa Racine quarrée $2a$: c'eſt pourquoi on prendra $2a...$ $^{b}/_{c}$ pour

$\frac{by}{c}$ pour le côté de ce quarré, & l'on trouvera $y \gtrless \frac{4abc+7acc}{bb-2cc}$, & au lieu de $x \gtrless y+a$, on aura $x \gtrless \frac{4abc+5acc+abb}{bb-2cc}$, où l'on voit que b doit être plus grand que $\sqrt{2cc}$, & la puiſſance propoſée $2xx+3ax-aa$, ſe changera en un quarré, dont le côté ſera $\frac{8acc+7abc-2abb}{bb-2cc}$.

Par le moyen d'une ſolution en trouver une infinité d'autres.

Il y a pluſieurs belles remarques à faire là-deſſus, mais il nous ſuffira pour le préſent de vous avoir ouvert le chemin pour en dire davantage. Je dirai ſeulement ici que par cette methode on peut donner une infinité de ſolutions differentes, quand on en a une. Car puiſque dans la puiſſance propoſée $2xx+3ax-aa$, la ſomme des unitez eſt un nombre quarré, c'eſt une marque évidente que cette puiſſance deviendra quarrée en ſuppoſant $x \gtrless a$, qui eſt une ſolution: & pour en avoir une autre par le moyen de cette premiere, on n'a qu'à ſuppoſer $x \gtrless y+a$, comme il a été fait auparavant, où nous avons trouvé $x \gtrless \frac{4abc+5acc+abb}{bb-2c}$, qui eſt une ſeconde ſolution: & pour en avoir une troiſiéme par le moyen de celle-ci, on n'a qu'à ſuppoſer $x \gtrless z+\frac{4abc+5acc+abb}{bb-2cc}$, & ainſi enſuite.

Quand même la ſomme des unitez ne ſeroit pas un nombre, on pourra encore rendre quarrée une telle puiſſance, pourvû qu'elle ſoit produite par la Multiplication de deux autres, c'eſt-à-dire, pourvû qu'elle ait deux nombres produiſans. Car ſi on égale enſemble ces deux nombres produiſans, la puiſſance propo-

ſée étant produite par la Multiplication de deux côtez égaux ſera quarrée, comme nous avons déja fait voir auparavant, & comme nous ferons encore voir ici plus particulierement.

Puiſſance qui a deux nombres produiſans.

Qu'il faille rendre quarrée cette puiſſance $3aa+ax-2xx$, dont les deux nombres produiſans ſont $a+x$, $3a-2x$. Si de ces deux nombres produiſans on fait cette Equation, $a+x \propto 3a-2x$, on trouvera $x \propto \frac{2a}{3}$, & ſi l'on met $\frac{2a}{3}$ à la place de x, la puiſſance propoſée $3aa+ax-2xx$ ſe changera en ce quarré $\frac{25aa}{9}$, dont le côté eſt $\frac{5a}{3}$.

Si vous ne voulez pas vous ſervir des deux nombres produiſans $a+x$, $3a-2x$, vous aurez une ſolution plus générale, en égalant la puiſſance propoſée $3aa+ax-2xx$ au quarré indéterminé yy, par cette Equation, $3aa+ax-2xx \propto yy$, dans laquelle vous trouverez $x \propto \frac{a+\sqrt{25aa-8yy}}{4}$. Ainſi on aura cette puiſſance à égaler au quarré $25aa-8yy$, pour le côté duquel prenant $5a \ldots \frac{by}{c}$, on trouvera $y \propto \frac{10abc}{bb+8cc}$: c'eſt pourquoi on aura $x \propto \frac{12acc-abb}{bb+8cc}$, & la puiſſance propoſée $3aa+ax-2xx$ ſe changera en celle ci, $\frac{100aabbcc}{b^4+16bbcc+64c^4}$, dont la Racine quarrée eſt $\frac{10abc}{bb+8cc}$.

Si les deux nombres produiſans ne peuvent pas être égalez entre eux, à cauſe de la valeur de la lettre inconnuë, qui ſe trouveroit niée, ou à cauſe de quelqu'autre abſurdité qui s'enſuivroit; on leur donnera la raiſon de deux quarrez indéterminez, comme nous avons déja fait ailleurs: ou bien ce qui eſt la même choſe on les changera en deux autres, qui leur ſoient reciproquement proportionnels, ſçavoir en multipliant l'un

l'un par un nombre indéterminé, & en diviſant l'autre par le même nombre indéterminé. Car ainſi on aura deux autres nombres produiſans, qu'on pourra égaler enſemble, & qui étant en raiſon reciproque avec les deux premiers, produiront par leur Multiplication la puiſſance propoſée.

Comme pour égaler au quarré cette puiſſance $2aa-ax-6xx$, qui a ces deux nombres produiſans $a-2x$, $2a+3x$, qu'on ne doit pas égaler enſemble, parce que dans cette Equation, $a-2x \propto 2a+3x$, on trouve $x \propto -\frac{a}{5}$, qui eſt une valeur niee; on multipliera le premier nombre produiſant $a-2x$ par le nombre indéterminé $\frac{b}{c}$, & on diviſera l'autre nombre produiſant $2a+3x$ par le le même nombre indéterminé $\frac{b}{c}$, pour avoir ces deux autres nombres produiſans $\frac{ab-2bx}{c}$, $\frac{2ac+3cx}{b}$, dont on fera cette Equation, $\frac{ab-2bx}{c} \propto \frac{2ac+3cx}{b}$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{abb-2acc}{2bb+3cc}$, où l'on voit que b doit être plus grand que $\surd 2cc$. Si donc on met $\frac{abb-2acc}{2bb+3cc}$, à la place de x, la puiſſance propoſée $2aa-ax-6xx$, ſe changera en celle-ci, $\frac{49aabbcc}{4b^4+12bbcc+9c^4}$, dont la Racine quarrée eſt $\frac{7abc}{2bb+3cc}$.

Nous avons tiré de cette regle générale, l'abregé ſuivant, pour égaler infiniment au quarré une puiſſance qui a deux nombres produiſans, lorſque dans chacun la lettre inconnuë n'a qu'une dimenſion.

Abregé de la Regle précedente.

Choiſiſſez à plaiſir deux quarrez indéterminez & inégaux, & multipliez les deux nombres produiſans chacun par l'un

de ces deux quarrez indéterminez, pour avoir deux produits, dont vous ferez une Equation, dans laquelle vous trouverez la valeur de la lettre inconnuë, laquelle valeur rendra quarrée la puiſſance propoſée.

Comme pour rendre quarrée cette puiſſance $3aa-10ax+8xx$, dont les deux nombres produiſans ſont $a-2x$, $3a-4x$: en prenant les deux quarrez indéterminez bb, cc, & en multipliant le premier nombre produiſant $a-2x$ par le premier quarré bb, & l'autre nombre produiſant $3a-4x$ par l'autre quarré cc, on aura ces deux produits $abb-2bbx$, $3acc-4ccx$, dont on fera cette Equation, $abb-2bbx \gtrless 3acc-4ccx$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless \frac{3acc-abb}{4cc-2bb}$, où l'on voit que b doit être moindre que $\surd 2cc$, ou bien plus grand que $\surd 3cc$. Si donc à la place de x, on met ſa valeur trouvée $\frac{3acc-abb}{4cc-2bb}$, la puiſſance, propoſée $3aa-10ax+8xx$, ſe changera en ce quarré, $\frac{aabbcc}{4c^4-4bbcc+b^4}$, dont le côté eſt $\frac{ab}{2cc \ldots bb}$.

Pour rendre raiſon de la détermination que nous avons faite, on conſiderera qu'afin que la quantité inconnuë x ſoit affirmée, il faut que le Numerateur & le Denominateur de ſa valeur trouvée $\frac{3acc-abb}{4cc-2bb}$, ſoient de même affection. Si l'on veut premierement que chacun ſoit affirme, c'eſt-à-dire, plus grand que 0, on aura ces deux inégalitez,

$$3acc-abb \oplus 0.$$
$$4cc-2bb \oplus 0.$$

dont la premiere s'enſuit de la ſeconde, ainſi il faut ſeulement avoir égard à la deuxiéme $4cc-2bb \oplus 0$, dans laquelle on trouvera $b \ominus \surd 2cc$. Ce qu'il faloit premierement démontrer. Mais ſi l'on veut que chacun

ſoit

ſoit nié, ou moindre que o, on aura ces deux inégalitez, $3acc-abb\ominus o$.

$4cc-2bb\ominus o$.

dont la deuxiéme s'enſuit de la premiere. Il faut donc ſeulement avoir égard à la premiere $3acc-abb\ominus o$, dans laquelle on trouvera $b\oplus\sqrt{3cc}$. Ce qui reſtoit à démontrer.

Pareillement pour rendre quarrée cette puiſſance $3aa+10ax+8xx$, dont les deux nombres produiſans ſont $a+2x$, $3a+4x$: on multipliera le premier $a+2x$ par le quarré indéterminé bb, & le deuxiéme $3a+4x$ par le quarré indéterminé cc, & on égalera enſemble les deux produits par cette Equation, $abb+2bbx\mathrel{)\!(} 3acc+4ccx$, dans laquelle on trouvera $x\mathrel{)\!(}\frac{3acc-abb}{2bb-4cc}$, où l'on voit que b doit être entre $\sqrt{2cc}$ & $\sqrt{3cc}$, & la puiſſance propoſée $3aa+10x+8xx$ ſe changera en ce quarré $\frac{aabbcc}{b4-4bbcc+4c4}$, dont le côté eſt $\frac{abc}{bb\ldots 2cc}$.

Quoi qu'en égalant enſemble les deux nombres produiſans $a+2x$, $3a+4x$, on ait une ſolution négative, ſçavoir $x\mathrel{)\!(} -a$: neanmoins on peut au moyen de cette ſolution negative en tirer une affirmative, par une methode ſemblable à celle que nous avons enſeignée un peu auparavant, pour trouver une infinité de ſolutions differentes, quand on en a une.

Tirer d'une ſolution negative une affirmative.

Ainſi parce que dans cet exemple nous avons $x\mathrel{)\!(} -a$, on ſuppoſera $x\mathrel{)\!(} y-a$, & au lieu de la puiſſance propoſée $3aa+10ax+8xx$, on aura celle-ci, $8yy-6ay+aa$, qu'on égalera au quarré par les methodes précedentes, ſçavoir en prenant $a\ldots\frac{by}{c}$, pour le côté de ce quarré, lequel par conſéquent ſera $aa-\frac{2aby}{c}+\frac{bbyy}{cc}$. Ainſi on aura cette Equation,

tion, $8yy-6ay+aa \propto aa-\frac{2aby}{c}+\frac{bbyy}{cc}$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{6acc-2abc}{8cc-bb}$: c'eſt pourquoi au lieu de $x \propto y-a$, on aura $x \propto \frac{abb-2acc-2abc}{8cc-bb}$, où l'on voit que b doit être entre $\sqrt{8cc}$ & $c+\sqrt{3cc}$, & au lieu de la puiſſance propoſée $3aa+10ax+8xx$, on aura ce quarré, $\frac{aabb-12aab^3c+52aabbcc-96aabc^3+64aac^4}{64c^4-16bbcc+b^4}$, dont le côté eſt $\frac{abb-6abc+8acc}{8cc-bb}$.

La raiſon de la détermination que nous avons faite, eſt qu'à cauſe du Dénominateur $8cc-bb$, qui ſe trouve dans la valeur de x, il faut que bb ſoit moindre que $8cc$, & par conſéquent $b \ominus \sqrt{8cc}$: & qu'à cauſe du Numerateur $abb-2acc-2abc$, il faut que abb ſoit plus grand que $2acc+2abc$, & conſéquemment $bb-2bc \oplus 2cc$, & dans cette inégalité conſiderée & reſoluë comme une Equation de deux dimenſions, ajoûtant de chaque côté le quarré cc, on aura cette autre inégalité $bb-2bc+cc \oplus 3cc$, où prenant la Racine quarrée de chaque partie, on aura $b-c \oplus \sqrt{3cc}$, & par conſéquent $b \oplus c+\sqrt{3cc}$. Donc puiſque nous avons $b \oplus c+\sqrt{3cc}$, & que nous avons trouvé auparavant $b \ominus \sqrt{8cc}$, il eſt aiſé de conclurre que b doit être entre $\sqrt{8cc}$, & $c+\sqrt{3cc}$.

Le même abregé pour égaler infiniment au quarré une puiſſance, qui a deux nombres produiſans, dans chacun deſquels la lettre inconnuë n'a qu'une dimenſion, ſe peut énoncer & pratiquer autrement en cette ſorte.

Second abregé.

Faites des deux nombres produiſans une fraction: & égalez cette fraction à un quarré indéterminé, qu'il ſera bon de repreſenter auſſi par une fraction, quand la loi des homogénes

mogénes le permettra, pour avoir une ſolution plus générale, par une Equation, dans laquelle vous trouverez la valeur de la lettre inconnuë, qui rendra quarrée la fraction propoſée.

Ainſi pour égaler au quarré cette puiſſance $6aa-5ax-6xx$, dont les deux nombres produiſans ſont $2a-3x$, $3a+2x$, faites de ces deux nombres produiſans la fraction $\frac{2a-3x}{3a+2x}$, & l'égalez au quarré indéterminé $\frac{bb}{cc}$, par cette Equation, $\frac{2a-3x}{3a+2x} \propto \frac{bb}{cc}$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{2acc-3abb}{2bb+3cc}$, où l'on voit que c doit être plus grand que $\sqrt{\frac{3bb}{2}}$, & la puiſſance propoſée $6aa-5ax-6xx$ ſe changera en celle-ci, $\frac{169aabbcc}{4b^4+12bbcc+9c^4}$, dont la Racine quarrée eſt $\frac{13abc}{2bb+3cc}$.

Mais on peut encore autrement & très-facilement égaler au quarré une ſemblable puiſſance, ſçavoir en la reduiſant à une autre, où la lettre inconnuë ſe rencontre par tout: ce qui ſe fera en égalant à une lettre indéterminée, comme à y, l'un des deux nombres produiſans, par une Equation dans laquelle on trouvera la valeur de la lettre inconnuë, qui changera la puiſſance propoſée en une autre, où la même lettre indéterminée ſe rencontrera par tout.

Comme dans la puiſſance précedente $6aa-5ax-6xx$, dont les deux nombres produiſans ſont $2a-3x$, $3a+2x$, ſi l'on ſuppoſe $2a-3x \propto y$, on trouvera $x \propto \frac{2a-y}{3}$, & la puiſſance propoſée $6aa-5ax-6xx$, ſe changera en celle-ci, $\frac{13ay-2yy}{3}$, laquelle étant égalée au quarré $\frac{bbyy}{cc}$, on trouvera $y \propto \frac{13acc}{3bb+2cc}$, & au lieu

lieu de $x \gtrless \frac{2a-y}{3}$, on trouvera $x \gtrless \frac{2abb-3acc}{3bb+2cc}$, comme auparavant, ſi l'on change b en c, & c en b.

PROBLEME II.

Egaler au quarré une puiſſance, où la lettre inconnuë a trois dimenſions.

Puiſſance avec un ſeul terme.

PRopoſons en premier lieu cette puiſſance ax^3, qui n'a qu'un terme. Pour la rendre quarrée, diviſez-la par le quarré xx, pour avoir en moindres termes cette autre puiſſance ax, qu'on pourra égaler au quarré, par *Probl.* 1. parce que la lettre inconnuë n'y a qu'une dimenſion. Si donc on prend b pour le côté de ce quarré, on aura cette Equation $ax \gtrless bb$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless \frac{bb}{a}$, que l'on auroit auſſi trouvé en égalant la puiſſance propoſée ax^3 au quarré $bbxx$. Si donc à la place de x, on met ſa valeur trouvée $\frac{bb}{a}$, la puiſſance propoſée ax^3 ſe changera en ce quarré $\frac{b^6}{aa}$, dont le côté eſt $\frac{b^3}{a}$.

Solution plus générale.

Si vous voulez une ſolution plus générale égalez la puiſſance reduite ax au quarré $\frac{bbxx}{cc}$, ou bien la puiſſance propoſée ax^3 au quarré $\frac{bbx^4}{cc}$, & vous trouverez $x \gtrless \frac{acc}{bb}$, & au lieu de la puiſſance propoſée ax^3, vous aurez celle-ci, $\frac{a^4c^6}{b^6}$, dont la Racine quarrée eſt $\frac{aac^3}{b^3}$.

Puiſſance

Puiſſance où le 3 & le 4 terme manque.

C'eſt de la même façon que l'on rendra quarrée cette autre Puiſſance ax^3+abxx, où le troiſiéme & le quatriéme terme manque, ſçavoir en la diviſant premierement par le quarré xx, pour avoir en moindres termes cette autre Puiſſance $ax+ab$, qu'on pourra égaler à ce quarré indéterminé cc, par cette Equation, $ax+ab \propto cc$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{cc}{a} - b$, où l'on voit que c doit être plus grand que $\sqrt{ab}$. Si donc à la place de x, on met ſa valeur trouvée $\frac{cc}{a} - b$, qu'on auroit auſſi eu en égalant la Puiſſance propoſée ax^3+abxx au quarré $ccxx$, cette Puiſſance ax^3+abxx, ſe changera en ce quarré $\frac{c^6 - 2abc^4 + aabbcc}{aa}$, dont le côté eſt $\frac{c^3 \ldots abc}{a}$.

Puiſſance où le 3 terme manque.

Pour rendre quarrée une Puiſſance où le troiſiéme terme manque, il faut que le dernier terme ſoit quarré, & dans ce cas on la pourra égaler au quarré en deux manieres, ſçavoir en l'égalant à ſon dernier terme qu'on ſuppoſe quarré, ou bien en l'égalant à un autre quarré, dont le côté ſoit égal à ſa plus proche Racine quarrée qu'on trouvera ſans peine, par le moyen du dernier terme que l'on ſuppoſe quarré.

Comme ſi on égale cette Puiſſance $ax^3 - 2bbxx + aabb$ à ſon dernier terme $aabb$, qui eſt quarré, par cette Equation, $ax^3 - 2bbxx + aabb \propto aabb$, l'on trouvera $x \propto \frac{2bb}{a}$, & au lieu de la Puiſſance propoſée $ax^3 - 2bbxx + aabb$, on aura celle-ci, $aabb$, dont la Racine quarrée eſt ab.

Ou bien pour égaler au quarré la même Puiſſance $ax^3 -$

$ax^3 - 2bbxx + aabb$, on prendra ſa plus proche Racine quarrée $ab - \frac{bxx}{a}$ pour le côté de ce quarré, lequel par conſéquent ſera $aabb - 2bbxx + \frac{bbx^4}{aa}$. Ainſi l'on aura cette Equation, $ax^3 - 2bbxx + aabb \propto aabb - 2bbxx + \frac{bbx^4}{aa}$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{a^3}{bb}$, & la Puiſſance propoſée $ax^3 - 2bbxx + aabb$ ſe changera en ce quarré, $aabb - \frac{2a^6}{bb} + \frac{a^{10}}{b^6}$, dont le côté eſt $ab \ldots \frac{a^5}{b^3}$.

Quand le dernier terme n'eſt pas quarré.

Quoique le dernier terme de la Puiſſance propoſée ne ſoit pas quarré, on la pourra neanmoins rendre quarrée, pourvû qu'elle ait deux nombres produiſans, dont l'un ſoit quarré, & dans chacun deſquels la lettre inconnuë ſe rencontre: car ſi on égale au quarré l'autre nombre produiſant, la Puiſſance propoſée deviendra quarrée, parce que le produit de deux nombres quarrez eſt un nombre quarré.

Ainſi parce que cette Puiſſance $ax^3 - 2aaxx + abxx + a^3x - 2aabx + a^3b$, a ces deux nombres produiſans, $aa - 2ax + xx$, $ab + ax$, dont le premier $aa - 2ax + xx$ a ſa Racine quarrée $a \ldots x$, on égalera le deuxiéme $ab + ax$ au quarré indéterminé cc, par cette Equation, $ab + ax \propto cc$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{cc - ab}{a}$, & la Puiſſance propoſée $ax^3 - 2aaxx + abxx + a^3x - 2aabx + a^3b$ ſe changera en un quarré, dont le côté ſera $\frac{c^3}{a} \ldots bc \ldots ac$.

Ou bien on rendra le dernier terme quarré par une methode ſemblable à celle que nous avons enſeignée au Problême précedent, où nous avons ſuppoſé que la ſomme des unitez étoit un nombre quarré, & que dans

dans la Puiſſance propoſée il n'y avoit qu'une même lettre connuë, ce que l'on doit auſſi ſuppoſer ici.

Ainſi pour rendre quarrée cette Puiſſance $ax^3 - 2aaxx + 10a^4$, où il n'y a que la lettre connuë a, & où la ſomme 9 des unitez eſt un nombre quarré; on ſuppoſera $x \propto z + a$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $ay^3 + aayy - a^3y + 9a^4$, pour le côté duquel prenant $3aa - \frac{9}{2}$, on trouvera $y \propto -\frac{15a}{16}$: c'eſt pourquoi au lieu de $x \propto y + a$, on aura $x \propto \frac{a}{16}$, & au lieu de la Puiſſance propoſée $ax^3 - 2aaxx + 10a^4$, on aura ce quarré $\frac{46648aa}{4656}$, dont le côté eſt $\frac{683aa}{36}$.

Parce que la Puiſſance reduite $ay^3 + aayy - a^3y + 9a^4$, a tous ſes termes & que le dernier eſt quarré, on la peut encore autrement égaler au quarré par une methode ſemblable à celle de l'exemple ſuivant.

Puiſſance qui a tous ſes termes.

Enfin pour rendre quarrée une Puiſſance, où tous les termes ſont, il faut auſſi que le dernier terme ſoit quarré, & prendre de la même façon la plus proche Racine quarrée de la Puiſſance propoſée, pour avoir le côté du quarré qu'on lui doit égaler : & ce côté ſe peut auſſi prendre en deux façons, car il peut être un Binome, qui détruira les deux derniers termes, ou bien un Trinome, qui détruira les trois derniers termes, ce qui ſe peut faire aiſément, en commençant à tirer la Racine quarrée par le premier terme qu'on ſuppoſe quarré.

Ainſi pour égaler au quarré cette Puiſſance $ax^3 + aaxx + 2b^3x + b^4$, où tous les termes ſont, & dont le dernier b^4 a ſa Racine quarrée bb, on prendra $bb + bx$ pour le côté de ce quarré, lequel par conſéquent ſera $b^4 + 2b^3x + bbxx$. Ainſi l'on aura cette Equation, $ax^3 + aaxx + 2b^3x + b^4 \propto b^4 + 2b^3x + bbxx$, dans laquelle on trouvera

trouvera $x \gtrless \frac{bb-aa}{a}$, où l'on voit que b doit être plus grand que a, & la Puiſſance propoſée $ax^3+aaxx+2b^3x+b^4$, ſe changera en ce quarré $\frac{b^6+2ab^5-aab^4-2a^3b^3+a^4bb}{aa}$ dont le côté eſt $\frac{b^3+abb...aab}{a}$.

Ou bien en continuant de prendre la Racine quarrée de la Puiſſance propoſée $ax^3+aaxx+2b^3x+b^4$, on aura ce Trinome $bb+bx+\frac{aaxx}{2bb}-\frac{1}{4}xx$, dont le quarré $b^4+2b^3x+aaxx+\frac{aax^3}{b}+\frac{a^4x^4}{4b^4}-bx^3-\frac{aax^4}{2bb}+\frac{1}{4}x^4$ étant égalé à la Puiſſance propoſée $ax^3+aaxx+2b^3x+b^4$, on trouvera $x \gtrless \frac{4b^5+4ab^4-4aab^3}{a^4-2aabb+b^4}$, où l'on trouvera que b doit être plus grand que $\frac{1}{2}\sqrt{5}aa-\frac{1}{2}a$, & la Puiſſance propoſée $ax^3+aaxx+2b^3x+b^4$ ſe changera en une autre, dont la Racine quarrée ſera $\frac{3b^{10}+12ab^9-24a^3b^7-2a^4b^6+12a^5b^5+a^8bb}{a^8-4a^6bb+6a^4b^4-4aab^6+b^8}$

Puiſſance où le ſecond terme manque.

Ces deux methodes ſe peuvent auſſi apliquer aux Puiſſances où le ſecond terme manque, pourvû que le dernier terme ſoit quarré. Comme pour égaler au quarré cette Puiſſance $ax^3+2abbx+b^4$, on prendra $bb+ax$ pour le côté de ce quarré, lequel par conſéquent ſera $b^4+2abbx+aaxx$, de ſorte qu'on aura cette Équation $ax^3+2abbx+b^4 \gtrless b^4+2abbx+aaxx$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless a$, & la Puiſſance propoſée $ax^3+2abbx+b^4$ ſe changera en ce quarré, $aa+2aabb+b^4$, dont le côté eſt $aa+bb$.

Ou bien en continuant de prendre la Racine quarrée de la Puiſſance propoſée $ax^3+2abbx+b^4$, on aura ce Trinome $bb+ax-\frac{aaxx}{2bb}$, pour le côté

du

du quarré qu'on lui doit égaler lequel par conſéquent ſera $b^4+2abbx-\frac{a^3x^3}{bb}+\frac{a^4x^4}{4b^4}$, de ſorte que l'on aura cette Equation, $ax^3+2abbx+b^4 \propto b^4+2abbx-\frac{a^3x^3}{bb}+\frac{a^4x^4}{4b^4}$ dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{4b^4+4aabb}{a^3}$, & au lieu de la Puiſſance propoſée $ax^3+2abbx+b^4$, on aura celle-ci, $\frac{64b^{10}+192aab^{10}+192a^4b^8+72a^6b^6+9a^8b^4}{a^8}$, dont la Racine quarrée eſt $\frac{8b^6+12aab^4+3a^4bb}{a^4}$.

Puiſſance où le 2 & le 4 terme manque.

Il n'y a point de regle aſſurée pour rendre quarrée une Puiſſance, où le ſecond & le quatriéme terme manque, à moins que dans cette Puiſſance la ſomme des unitez ne ſoit un nombre quarré, & qu'il n'y ait qu'une même lettre connuë: car alors on la peut égaler au quarré en une infinité de façons, comme nous avons fait voir ailleurs, & comme nous allons encore faire voir ici.

Propoſons cette Puiſſance ax^3+3a^3x, où la ſomme 4 des unitez eſt un nombre quarré. Suppoſez $x \propto y+a$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $ay^3+3aayy+6a^3y+4a^4$, pour le côté duquel prenant $2aa+\frac{3ay}{4}$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $ay^3+3aayy+6a^3y+4a^4 \propto 4a^4+6a^3y+\frac{9aayy}{4}$, l'on trouvera $y \propto -\frac{14}{4}$: c'eſt pourquoi au lieu de $x \propto y+a$, on aura $x \propto \frac{a}{4}$, & la Puiſſance propoſée ax^3+3a^3x, ſe changera en ce quarré $\frac{49a^4}{64}$, dont le côté eſt $\frac{7aa}{8}$.

PRO-

PROBLEME IV.

Egaler au quarré une Puiſſance, où la lettre inconnuë a quatre dimenſions.

Puiſſance qui n'a que les deux premiers termes.

UNe Puiſſance où la lettre inconnuë monte juſques au quatriéme degré, doit avoir au moins deux termes, & premierement ſi elle n'a que les deux premiers termes, on la diviſera par le quarré de la lettre inconnuë, & l'on aura en moindres termes une autre Puiſſance où la lettre inconnuë n'aura que deux dimenſions, & que par conſéquent on pourra rendre quarrée par *Probl.* 2.

Ainſi pour rendre quarrée cette Puiſſance abx^4+abbx^3, qui n'a que les deux premiers termes, en la diviſant par le quarré xx, on aura en moindres termes cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $abxx+abbx$, pour le côté duquel prenant cx, en ſorte qu'on ait cette Equation, $abxx+abbx \propto ccxx$; on trouvera $x \propto \frac{abb}{cc-ab}$, qu'on auroit auſſi trouvée en égalant la Puiſſance propoſée abx^4+abbx^3 au quarré ccx^4. Si donc à la place de x, on met ſa valeur trouvée $\frac{abb}{cc-ab}$, la Puiſſance propoſée abx^4+abbx^3 ſe changera en ce quarré, $\frac{c^8-4abc^6+6aabbc^4-4a^3b^3cc+a^4b^4}{a^4-8cc}$ dont le côté eſt $\frac{aabbc}{c^4-2abcc+aabb}$.

Solution plus générale.

Parce que la Puiſſance reduite $abxx+abbx$, a ces deux nombres produiſans bx, $ax+ab$, dont chacun contient la lettre inconnuë, on aura une ſolution plus générale, en donnant aux deux nombres produiſans la raiſon de deux quarrez, ce qui ſe fera en

les

les multipliant chacun par un quarré indéterminé, & en égalant enſemble les deux produits. Si donc on multiplie le premier nombre produiſant bx par le quarré indéterminé cc, & le ſecond $ax+ab$ par le quarré indeterminé dd, & qu'on égale enſemble les deux produits, on aura cette Equation, $bccx \gtrless addx + abdd$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless \frac{abdd}{bcc-add}$, & la Puiſſance propoſée abx^4+abbx^3 ſe changera en un quarré, dont le côté ſera $\frac{aab^3cd^3}{bbc^4-2abccdd+aad^4}$.

Puiſſance qui n'a que les trois premiers termes.

Pour rendre quarrée une Puiſſance qui n'a que les trois premiers termes, il faut que le premier ou bien le troiſiéme terme ſoit quarré, & dans ce cas la Puiſſance propoſée ſe pourra rendre quarrée en deux façons: & ſi le premier & le troiſiéme terme ſont tous deux quarrez, on la pourra égaler au quarré en quatre façons, comme vous allez voir dans l'exemple ſuivant.

Qu'il faille égaler au quarré cette Puiſſance, x^4-ax^3+bbxx, où il n'y a que les trois premiers termes, & dont le premier & le troiſiéme ſont quarrez. Diviſez-la par le quarré xx, pour avoir en moindres termes cette autre Puiſſance, $xx-ax+bb$, qu'on peut égaler au premier ou au dernier terme, puiſqu'ils ſont quarrez, ou bien l'on en peut prendre la plus proche Racine quarrée en commençant par le premier ou par le troiſiéme terme.

Si on égale la Puiſſance reduite $xx-ax \gtrless bb$ au premier terme xx, ou la propoſée x^4-ax^3+bbxx à ſon premier terme x^4, on trouvera $x \gtrless \frac{bb}{a}$, & au lieu de

la Puiſſance propoſée x^4-ax^3+bbxx on aura celle-ci; $\frac{b^8}{a^4}$, dont la Racine quarrée eſt $\frac{b^4}{aa}$.

Si on égale la Puiſſance reduite $xx-ax+bb$, au dernier terme bb, ou la propoſée x^4-ax^3) $bbxx$ à ſon troiſiéme terme $bbxx$, l'on trouvera x) a, & au lieu de la Puiſſance propoſée x^4-ax^3+bbxx, on aura ce quarré $aabb$, dont le côté eſt ab.

Si l'on commence à tirer la Racine quarrée de la Puiſſance reduite $xx-ax+bb$ par le premier terme xx, on aura $x+c$ ſelon la regle générale, pour le côté du quarré qu'on lui doit égaler, lequel par conſéquent ſera $xx+2cx+cc$, dans laquelle on trouvera x) $\frac{bb-cc}{a+2c}$, & la Puiſſance propoſée x^4-ax^3+bbxx, ſe changera en une autre, dont la Racine quarrée ſera $\frac{b^4+abbc-ac^3-c^4}{aa++ac+4cc}$.

Enfin ſi l'on commence à tirer la Racine quarrée de la Puiſſance reduite $xx-ax+bb$ par ſon dernier terme bb, on aura par les regles du *Probl.* 2. $b+\frac{cx}{d}$ pour le côté du quarré qu'on lui doit égaler, lequel par conſéquent ſera $bb+\frac{2bcx}{d}+\frac{ccxx}{dd}$, & l'on aura cette Equation, $xx-ax+bb$) $bb+\frac{2bcx}{d}+\frac{ccxx}{dd}$; dans laquelle on trouvera x) $\frac{2bcd+add}{dd-cc}$, & au lieu de la Puiſſance propoſée x^4-ax^3+bbxx, on en aura une autre dont la Racine quarrée eſt $\frac{2bbc^3d+2bbcd^3+3abccdd+abd^4+aacd^3}{d^4-2ccdd+c^4}$.

Puiſſance où tous les termes ſont.

On peut auſſi en quatre façons rendre quarrée une Puiſſanc

Puiſſance, où tous les termes ſont, pourvû que le premier & le dernier ſoient quarrez, parce qu'ils ſervent à prendre la plus proche Racine quarrée de la Puiſſance propoſée, en détruiſant tous les termes excepté deux. La premiere façon détruit les trois premiers termes, la deuxiéme détruit les deux premiers termes & le dernier, la troiſiéme détruit les trois derniers termes, & la quatriéme détruit les deux derniers termes avec le premier.

Comme pour égaler au quarré cette Puiſſance, $x^4-2ax^3+5aaxx-6abbx+b^4$, où tous les termes ſont, & dont le premier & le dernier ſont quarrez: ſi vous en prenez la plus proche Racine quarrée, en commençant par le premier terme x^4, en ſorte qu'elle détruiſe les trois premiers, vous aurez $xx-ax+2aa$, dont le quarré $x^4-2ax^3+3aaxx-4a^3x+4a^4$ étant égalé à la Puiſſance propoſée $x^4-2ax^3+5aaxx-6abbx+b^4$, on trouvera $x \mathrel{)\!\!)} \frac{4aa-bb}{4a-6ab}$, où l'on voit que b doit être moindre que $\sqrt{\frac{24aa}{5}}$, ou bien plus grand que $\sqrt{2aa}$.

Si $a \mathrel{)\!\!)} 1$, & $b \mathrel{)\!\!)} 2$, on trouvera $x \mathrel{)\!\!)} \frac{1}{5}$, & la Puiſſance propoſée $x^4-2ax^3+5aaxx-6abbx+b^4$, ſe changera en ce quarré $\frac{1936}{625}$, dont le côté eſt $\frac{44}{25}$.

Ou bien en commençant par le même premier terme x^4, en ſorte que la Racine quarrée détruiſe les deux premiers & le dernier, on aura $xx-ax+bb$, dont le quarré $x^4-2ax^3+aaxx+2bbxx-2abbx+b^4$, étant égalé à la Puiſſance propoſée $x^4-2ax^3+5aaxx-6abbx+b^4$, on trouvera $x \mathrel{)\!\!)} \frac{2bb}{2aa-bb}$, où l'on voit que b doit être moindre que $\sqrt{2aa}$.

Si $a \mathrel{)\!\!)} 1$, & $b \mathrel{)\!\!)} 1$, on trouvera $x \mathrel{)\!\!)} 2$, & la Puiſſance propoſée $x^4-2ax^3+5aaxx-6abbx+b^4$, ſe changera en ce quarré 9, dont le côté eſt 3.

Mais en commençant par le dernier terme b^4, en ſorte que la Racine quarrée détruiſe les trois derniers, on aura $bb-3ax-\frac{2aaxx}{bb}$, dont le quarré $b^4-6abbx+5aaxx+\frac{12a^3x^3}{bb}+\frac{4a^4x^4}{b^4}$ étant égalé à la Puiſſance propoſée $x^4-2ax^3+5aaxx-6abbx+b^4$, on trouvera $x \gg \frac{12a^3bb+2ab^3}{b^4-4a^4}$, où l'on voit que b doit être plus grand que $\sqrt{2aa}$.

Si $a \gg 1$, & $b \gg 2$, on trouvera $x \gg \frac{20}{3}$, & la Puiſſance propoſée $x^4-2ax^3+5aaxx-6abbx+b^4$ ſe changera en ce quarré $\frac{11881296}{81}$, dont le côté eſt $\frac{344}{9}$.

Ou bien enfin en commençant par le même dernier terme b^4, en ſorte que la Racine quarrée détruiſe les deux derniers & le premier, on aura $bb-3ax+xx$, dont le quarré $b^4-6abbx+9aaxx+2bbxx-6ax^3+x^4$ étant égalé à la Puiſſance propoſée $x^4-2ax^3+5aaxx-6abbx+b^4$, on trouvera $x \gg a+\frac{bb}{2a}$.

Si $a \gg 1$, & $b \gg 2$, on trouvera $x \gg 3$, & la Puiſſance propoſée $x^4-2ax^3+5aaxx-6abbx+b^4$, ſe changera en ce quarré 16, dont le côté eſt 2.

Puiſſance où le quatriéme terme manque.

Si le quatriéme terme manque dans la Puiſſance propoſée, & que le premier ſoit quarré, on la pourra égaler au quarré en détruiſant les trois premiers termes: & ſi le dernier terme eſt encore quarré, on la pourra rendre quarrée en détruiſant les deux premiers termes & le dernier, ou bien ſeulement le premier & le dernier.

Ainſi pour égaler au quarré cette Puiſſance, $x^4+2ax^3-bbxx+aabb$, qui n'a point de quatriéme terme, & dont le premier & le dernier, ſont quarrez, on aura

aura pour le côté de ce quarré, premierement $xx+ax+\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}bb$, dont le côté $x^4+2ax^3-a^2x+\frac{1}{4}a^4-bbxx-abbx+\frac{1}{2}aabb+\frac{1}{4}b^4$ étant égalé à la Puiſſance propoſée $x^4+2ax^3-bbxx+aabb$, on trouvera $x \gg \frac{a^4+2aab+b^4}{4a^3+4abb}$.

Si $a \gg 1$, & $b \gg 2$, on trouvera $x \gg \frac{9}{10}$, & la Puiſſance propoſée $x^4+2ax^3-bbxx+aabb$, ſe changera en ce quarré $\frac{146121}{160000}$, dont le côté eſt $\frac{739}{400}$.

Ou bien on aura $xx+ax-ab$, dont le quarré $x^4+2ax^3+aaxx-2abxx-2aabx+aabb$ étant égale à la Puiſſance propoſée $x^4+2ax^3-bbxx+aabb$, on trouvera $x \gg \frac{2aab}{aa-2ab+bb}$.

Si $a \gg 1$, & $b \gg 2$, on trouvera $x \gg 4$ & la Puiſſance propoſée $x^4+2ax^3-bbxx+aabb$, ſe changera en ce quarré 324, dont le côté eſt 18.

Ou bien encore on aura $xx+ab$, dont le quarré $x^4+2abxx+aabb$ étant égalé à la Puiſſance propoſée $x^4+2ax^3-bbxx+aabb$, on trouvera $x \gg \frac{bb}{2a}+b$.

Si $a \gg 1$, & $b \gg 2$, on trouvera $x \gg 4$, & la Puiſſance propoſée $x^4+2ax^3-bbxx+aabb$, ſe changera en ce quarré 324, dont le côté eſt 18.

Puiſſance où le ſecond terme manque.

Si le ſecond terme manque dans la Puiſſance propoſée, & que le premier ſoit quarré, on la pourra égaler au quarré en détruiſant le premier & le troiſiéme terme: & ſi le dernier terme eſt encore quarré, on la pourra rendre quarrée en detruiſant le premier & le dernier terme, ou bien les trois derniers.

Ainſi pour égaler au quarré cette Puiſſance, $x^4+2aaxx-aabx+aabb$, qui n'a point de ſecond terme, & dont le premier & le dernier ſont quarrez, on aura pour le côté de ce quarré, premierement $xx+aa$, dont le quarré $x^4+2aaxx+a^4$ étant égalé à la Puiſſance

propoſée $x^4+2aaxx-aabx+aabb$, on trouvera $x \propto b-\frac{aa}{b}$, où l'on voit que b doit être plus grand que a.

Si $a \propto 1$, & $b \propto 2$, on trouvera $x \propto \frac{3}{2}$, & la puiſſance propoſée $x^4+2aaxx-aabx+aabb$, ſe changera en ce quarré $\frac{169}{16}$, dont le côté eſt $\frac{13}{4}$.

Ou bien on aura $xx-ab$, dont le quarré $x^4-2abxx+aabb$ étant égalé à la puiſſance propoſée $x^4+2aaxx-aabx+aabb$, on trouvera $x \propto \frac{ab}{2a+2b}$.

Si $a \propto 1$, & $b \propto 2$, on trouvera $x \propto \frac{1}{3}$, & la puiſſance propoſée $x^4+2aaxx-aabx+aabb$ ſe changera en ce quarré $\frac{289}{81}$, dont le côté eſt $\frac{17}{9}$.

Ou bien encore on aura $ab-\frac{1}{2}ax+\frac{7axx}{8b}$, dont le quarré $aabb-aabx+2aaxx-\frac{7ax^3}{8b}+\frac{49aax^4}{64bb}$ étant égalé à la puiſſance propoſée $x^4+2aaxx-aabx+aabb$, on trouvera $x \propto \frac{56aab}{49aa-64bb}$, où l'on voit que a doit être plus grand que $\frac{8b}{7}$.

Si $a \propto 2$, & $b \propto 1$, on trouvera $x \propto \frac{56}{31}$, & la puiſſance propoſée $x^4+2aaxx-aabx+aabb$, ſe changera en ce quarré $\frac{3136449124}{1185921}$, dont le côté eſt $\frac{1818}{1089}$.

Parce qu'on peut ôter ſans beaucoup de peine le ſecond terme d'une puiſſance, on voit aiſément que par l'une des trois methodes précedentes, on peut rendre quarrée une puiſſance, où la lettre inconnuë monte juſques au quatriéme degré, parce que ſi elle n'a pas les conditions neceſſaires, on en peut ôter le ſecond terme, quand le premier eſt quarré.

Puiſſance où le troiſiéme & le quatriéme terme manque.

Comme pour égaler au quarré cette puiſſance $x^4-4ax^3+16a^4$, où le troiſiéme & le quatriéme terme manque, on ôtera premierement le ſecond terme, en ſuppoſant $x \propto y+a$, & l'on aura cette autre puiſſance à

égaler

égaler au quarré, $y^4-6aayy-8a^3y+13a^4$, pour le côté duquel on prendra $yy-3aa$, pour avoir cette Equation, $y^4-6aayy-8a^3y+13a^4 \propto yy-6aayy+9a^4$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{4}{1}$: c'eſt pourquoi au lieu de $x \propto y+a$, on aura $x \propto \frac{5}{1}$, & la puiſſance propoſée $x^4-4ax^3+16a^4$, ſe changera en ce quarré $\frac{121a^4}{16}$, dont le côté eſt $\frac{11aa}{4}$.

Comme il arrive que dans la puiſſance propoſée $x^4-4ax^3+16a^4$, le dernier terme $16a^4$ eſt quarré, on la peut égaler au quarré en trois façons, ſans en ôter le ſecond terme, premierement en l'égalant au dernier terme $16a^4$, & alors on trouvera $x \propto 4a$, & la puiſſance propoſée $x^4-4ax^3+16a^4$ ſe changera en ce quarré $16a^4$, dont le côté eſt $4aa$.

Ou bien en l'égalant à ce quarré $x^4-8aaxx+16a^4$, dont le côté eſt $xx \ldots 4aa$, & qui détruit le premier & le dernier terme, & alors on trouvera $x \propto 2a$, mais cette valeur eſt ici inutile, parce qu'elle rend la puiſſance propoſée $x^4-4ax^3+16a^4$ égale à rien.

Ou bien encore en l'égalant au quarré $x^4-4ax^3+4aaxx$, dont le côté eſt $xx \ldots 2ax$, & qui détruit les deux premiers termes, & alors on trouvera $x \propto 2a$, comme auparavant.

Puiſſance où le deuxiéme & le troiſiéme terme manque.

C'eſt par la deuxiéme de ces trois façons que l'on rendra quarrée cette autre puiſſance $x^4-2a^3x+9a^4$, où le deuxiéme & le troiſiéme terme manque, & dont le premier & le dernier ſont quarrez, ſçavoir en l'égalant au quarré $x^4-6aaxx+9a^4$, dont le côté eſt $xx \ldots 3aa$, & qui détruit le premier & le dernier terme, pour avoir $x \propto \frac{1}{3}a$, & la puiſſance propoſée $x^4-2a^3x+9a^4$, ſe changera en ce quarré, $\frac{676a^4}{81}$, dont le côté eſt $\frac{26aa}{9}$.

On la peut auſſi égaler au premier terme x^4, & alors on trouvera $x \propto \frac{9a}{2}$, & la puiſſance propoſée $x^4-2a^3x+9a^4$

ſe changera en ce quarré, $\frac{656144}{16}$, dont le côté eſt $\frac{8144}{4}$.

Si le dernier terme n'étoit pas quarré, & qu'il n'y eût qu'une même lettre connuë dans une ſemblable puiſſance, on la pourroit neanmoins encore rendre quarrée, pourvû que la ſomme des unitez fût un nombre quarré, parce que dans ce cas elle peut être réduite en une autre, dont le dernier terme ſera quarré, comme nous avons déja fait voir dans les Problêmes précedens, & comme nous allons encore faire voir ici.

Puiſſance où les unitez font un nombre quarré.

Qu'il faille égaler au quarré cette puiſſance, $x^4 - 4ax^3 + 12a^4$, dont les unitez font le nombre quarré 9. ſuppoſez $x \propto y + a$, pour avoir cette autre puiſſance à égaler au quarré, $y^4 - 6aayy - 8a^3y + 9a^4$, pour le côté duquel prenant $3aa - \frac{4}{3}ay + yy$, on trouvera $y \propto \frac{114}{6}$, & par conſéquent $x \propto \frac{174}{6}$, & la puiſſance propoſée $x^4 - 4ax^3 + 12a^4$, ſe changera en ce quarré $\frac{67404144}{1296}$, dont le côté eſt $\frac{8121}{36}$.

On peut très-facilement égaler au quarré une puiſſance, lorſqu'elle a quatre nombres produiſans, dans chacun deſquels la lettre inconnuë ſe rencontre multipliée par un même nombre: ſçavoir en rendant proportionnels ces quatre nombres produiſans, c'eſt-à-dire, en égalant le produit de deux au produit des deux autres, étant certain que le Plan-plan de quatre nombres proportionnels eſt un nombre quarré.

Puiſſance qui a quatre nombres produiſans.

Ainſi pour égaler au quarré cette puiſſance,

$$x^4 + 7ax^3 + 6aaxx + 21abbx - 4bx^3 - 28abxx - 24aabx + 18aabb + 3bbxx$$

qui a ces quatre nombres produiſans,

$$x + 6a,\ x - b,\ x - 3b,\ x + a.$$

ſi on égale enſemble le produit des deux premiers, & le produit des deux derniers, par cette Equation, $xx+6ax-bx-6ab \propto xx+ax-3bx-3ab$; on trouvera $x \propto \frac{3ab}{5a+2b}$.

Si $a \propto 2$, & $b \propto 1$, on trouvera $x \propto \frac{1}{2}$, & la puiſſance propoſée ſe changera en ce quarré $\frac{625}{144}$, dont le côté eſt $\frac{25}{12}$.

On peut égaler le produit des deux extrêmes à celui des deux moyens, par cette Equation, $xx+7ax+6aa \propto xx-4bx+3bb$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{3bb-6aa}{7a+4b}$, où l'on voit que b doit être plus grand que $\sqrt{2aa}$.

Si $a \propto 1$, & $b \propto 2$, on trouvera $x \propto \frac{1}{5}$, & la puiſſance propoſée ſe changera en ce quarré $\frac{10176}{625}$, dont le côté eſt $\frac{101}{25}$.

On peut auſſi égaler le produit du premier & du troiſiéme nombre produiſant au produit des deux autres, par cette Equation, $xx+6ax-3bx-18ab \propto xx+ax-bx-ab$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{17ab}{5a-2b}$, où l'on voit que à doit être plus grand que $\frac{2b}{5}$.

Si $a \propto 5$, & $b \propto 4$, ou trouvera $x \propto 20$. & la puiſſance propoſée ſe changera en ce quarré 160000, dont le côté eſt 400.

Si $a \propto 7$, & $b \propto 9$, on trouvera $x \propto 63$, & la puiſſance propoſée ſe changera en ce quarré 14288400, dont le côté eſt 3780.

PROBLEME V.

Egaler au quarré une puiſſance, où la lettre inconnuë a plus de quatre dimenſions.

IL n'y a point de regle générale pour égaler au quarré une puiſſance où la lettre inconnuë monte au deſſus

deſſus du quatriéme degré, excepté celle qui n'a que les deux premiers termes. C'eſt pourquoi nous donnerons ſeulement ici des exemples de quelques-unes, qu'on peut rendre quarrées.

Premier Exemple.

Pour rendre quarrée cette puiſſance ax^5+aax^4; diviſez-la par le quarré x^4, pour avoir en moindres termes cette autre puiſſance à égaler au quarré, $ax+aa$, pour le côté duquel prenant b, en ſorte qu'on ait cette Equation, $ax+aa \propto bb$, on trouvera $x \propto \frac{bb}{a}-a$, qu'on auroit auſſi trouvé en égalant la puiſſance propoſée ax^5+aax^4 au quarré bbx^4.

Si $b \propto 2$, & $a \propto 1$, on trouvera $x \propto 3$, & la puiſſance propoſée ax^5+aax^4, ſe changera en ce quarré 324, dont le côté eſt 18.

Second Exemple.

Pour rendre quarrée cette puiſſance, $x^6+ax^5-abx^4$, diviſez-la par le quarré x^4, pour avoir en moindres termes cette autre puiſſance à égaler au quarré, $xx+ax-ab$, pour le côté duquel prenant $x \ldots c$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $xx+ax-ab \propto xx-2cx+cc$, on trouvera $x \propto \frac{ab+cc}{a+2c}$, qu'on auroit auſſi trouvé en égalant la puiſſance propoſée $x^6+ax^5-abx^4$, au quarré $x^6-2cx^5+ccx^4$, dont le côté eſt $x^3 \ldots cxx$.

Si $a \propto 1$, & $b \propto 2$, & qu'on ſuppoſe $c \propto 4$, on trouvera $x \propto 2$, & la puiſſance propoſée $x^6+ax^5-abx^4$, ſe changera en ce quarré 64, dont le côté eſt 8.

Troiſiéme Exemple.

Pour égaler au quarré cette puiſſance, $ax^5-2aabx^3+a^4xx$, diviſez-la par le quarré xx, pour avoir en moindres termes cette autre puiſſance à égaler au quarré, $ax^3-2aabx+a^4$, pour le côté duquel prenant $aa \ldots bx$,

en

en ſorte qu'on ait cette Equation, $ax^5 - 2aabx + a^4 \propto a^4 - 2aabx + bbxx$, on trouvera $x \propto \frac{bb}{a}$, qu'on auroit auſſi trouvé en égalant la puiſſance propoſée $ax^5 - 2aabx^3 + a^4xx$, au quarré $a^4xx - 2aabx^3 + bbx^4$, dont le côté eſt $aax \ldots bxx$. Si donc à la place de x, on met ſa valeur trouvée $\frac{bb}{a}$, la puiſſance propoſée $ax^5 - 2aabx^3 + a^4xx$, ſe changera en ce quarré $\frac{b^{10} - 2a^3b^7 + a^6b^4}{a^4}$, dont le côté eſt $\frac{b^5 - a^3bb}{aa}$.

Quatriéme Exemple.

Pour rendre quarrée cette puiſſance $x^6 - 4aabx^3 + 8aab^3x$, dont la plus proche Racine quarrée eſt $x^3 - 2aab$, que l'on prendra pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la puiſſance propoſée, de ſorte qu'on aura cette Equation, $x^6 - 4aabx^3 + 8aab^3x \propto x^6 - 4aabx^3 + 4a^4bb$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{aa}{2b}$, & la puiſſance propoſée $x^6 - 4aabx^3 + 8aab^3x$, ſe changera en ce quarré, $\frac{a^{12} - 32a^8b^4 + 256a^4b^8}{64b^6}$, dont le côté eſt $\frac{a^6 \ldots 16aab^4}{8b^3}$.

Cinquiéme Exemple.

Pour égaler au quarré cette puiſſance, $x^6 - 3abx^4 + 3aabbxx - a^3b^3$, dont la Racine cubique eſt $xx - ab$, il faut égaler au quarré cette Racine cubique $xx - ab$; comme au quarré $xx - 2cx + cc$, & alors on trouvera $x \propto \frac{ab + cc}{2c}$.

Si $a \propto 3$, & $b \propto 4$, & qu'on ſuppoſe $c \propto 2$, ou x 6 l'on trouvera $x \propto 4$, & la puiſſance propoſée $x^6 - 3abx^4 + 3aabbxx - a^3b^3$, ſe changera en ce quarré 64, dont le côté eſt 8.

Ou bien parce que la puiſſance propoſée $x^6 - 3abx^4 + 3aabbxx$

$+3aabbxx-a^3b^3$ a ces deux nombres produiſans, $x^4-2abxx+aabb$, $xx-ab$, & que le premier $x^4-2abxx+aabb$ eſt quarré, il ſuffira d'égaler au quarré le ſecond $xx-ab$, comme il a été fait, ou bien en cette ſorte.

Egalez le ſecond nombre produiſant $xx-ab$ au quarré yy, pour avoir $xx-yy \propto ab$: & parce que $xx-yy$ a ces deux nombres produiſans $x-y$, $x+y$, & que ab a ces deux a, b, on peut ſuppoſer $x-y \propto a$, & $x+y \propto b$, pour avoir $x \propto a+y$, & $x \propto b-y$, & par conſéquent cette Equation, $a+y \propto b-y$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{b-a}{2}$, & au lieu de $x \propto a+y$, ou de $x \propto b-y$, ou aura $x \propto \frac{b+a}{2}$.

Parce que nous avons ſuppoſé $a \propto 3$, & $b \propto 4$, on trouvera $x \propto \frac{7}{2}$, & la puiſſance propoſée $x^6-3abx^4+3aabbxx-a^3b^3$, ſe changera en ce quarré $\frac{1}{64}$, dont le côté eſt $\frac{1}{8}$.

PROBLEME VI.

Egaler au quarré une puiſſance, où il y a pluſieurs lettres inconnuës.

LA maniere d'égaler au quarré une puiſſance, qui a pluſieurs lettres inconnuës, ou indéterminées, eſt la même que celle que nous avons expliquée dans les Problêmes précedens : mais elle n'eſt pas ici ſujette à tant de conditions, parce que quand ces conditions manquent, on les fait aiſément venir, ſçavoir en changeant quelqu'une des lettres inconnuës, en ſorte que ſa valeur renferme ces conditions que l'on demande, comme vous allez voir dans les Exemples ſuivans.

Premier Exemple.

Pour rendre quarrée cette puiſſance $x4-2ax^3+abxy-aayy$, on voit que cela ſeroit facile, s'il n'y avoit que

que les deux premiers termes x^4, $2ax^3$, & qu'ainſi cette condition marque à la puiſſance propoſée, pour la pouvoir égaler au quarré. Il faut donc faire évanouïr les deux autres termes $abxy$, $aayy$, ce qui ſe peut ici faire, parce qu'ils ſont de differente affection, car ſi on les égale entre eux, ils ſe détruiront mutuellement. Faiſons donc cette Equation, $abxy \propto aayy$, ce qui eſt la même choſe que ſi l'on faiſoit celle-ci, $abxy - aayy \propto 0$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{bx}{a}$. Si donc on met $\frac{bx}{a}$ à la place de y, les deux derniers termes $abxy$, $aayy$, s'évanoüiront, & la puiſſance propoſée $x^4 - 2ax^3 + abxy - aayy$, ſe reduira en celle-ci, $x^4 - 2ax^3$, laquelle étant divisée par le quarré xx, on aura en moindres termes cette autre puiſſance à égaler au quarré, $xx - 2ax$, pour le côté duquel prenant $x \ldots c$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $xx - 2ax \propto xx - 2cx + cc$, on trouvera $x \propto \frac{cc}{2c - 2a}$, & au lieu de $y \propto \frac{bx}{a}$, on aura $y \propto \frac{bcc}{2ac - 2aa}$.

Si $a \propto 1$, & $b \propto 6$, & qu'on ſuppoſe $c \propto 4$, on trouvera $x \propto \frac{8}{7}$, & $y \propto 16$, & la puiſſance propoſée $x^4 - 2ax^3 + abxy - aayy$, ſe changera en celle-ci, $\frac{4096}{49}$, dont la Racine quarrée eſt $\frac{64}{7}$.

Ou bien dans l'Equation ſuppoſée $abxy \propto aayy$, on trouvera $x \propto \frac{ay}{b}$, & la puiſſance propoſée $x^4 - 2ax^3 + abxy - aayy$, ſe changera en celle-ci, $\frac{a^4y^4}{b^4} - \frac{2a^4y^3}{b^3}$. Multipliez-la par le quarré $\frac{b^4}{a^4yy}$, pour avoir en entiers & en moindres termes cette autre puiſſance à égaler au quarré, $yy - 2by$, pour le côté duquel prenant $y \ldots c$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $yy - 2by \propto yy - 2cy + cc$, on trouvera $y \propto \frac{cc}{2c - 2b}$, & au lieu de $x \propto \frac{ay}{b}$, on aura $x \propto \frac{acc}{2bc - 2bb}$.

Parce

Parce que nous avons ſuppoſé $a \gtrless 1$, & $b \gtrless 6$, ſi l'on ſuppoſe $c \gtrless 8$, on trouvera $x \gtrless \frac{8}{3}$, & $y \gtrless 16$, comme auparavant: mais ſi l'on ſuppoſe $c \gtrless 12$, on trouvera $x \gtrless 2$, & $y \gtrless 12$, mais ces valeurs ne ſont pas propres, parce qu'elles rendent la puiſſance propoſée, $x^4 - 2ax^3 + abxy - aayy$, égale à rien. Ainſi la quantité indéterminée c, a beſoin de détermination, qui ſe fera en cette ſorte. *Détermination.*

Si à la place de x, on met ſa valeur trouvée $\frac{act}{2bc-2bb}$; & à la place de y, ſa valeur trouvée $\frac{cc}{2c-2b}$, la puiſſance propoſée $x^4 - 2ax^3 + abxy - aayy$, ſe changera en une fraction quarrée, qui aura pour Numerateur le quarré ſuivant, $a^4c^8 - 4abc^7 + 4a^4bc^6$, dont le côté eſt $aac^4 \ldots 2aabc^3$, où l'on voit que la quantité indéterminée c, doit être plus grande ou moindre que $2b$: & comme à cauſe du Dénominateur $2c - 2b$ de la valeur trouvée $\frac{cc}{2c-2b}$ de y, on connoît que la même quantité indéterminée c, doit être plus grande que b, d'où l'on conclut que pour ſes juſtes limites elle peut être plus grande que $2b$, ou bien entre b & $2b$.

Au lieu de faire évanouïr les deux derniers termes, on peut détruire les deux premiers x^4, $2ax^3$, parce qu'ils ſont auſſi de contraire affection. Si donc on les égale enſemble par cette Equation, $x^4 \gtrless 2ax^3$, on trouvera $x \gtrless 2a$, & la puiſſance propoſée $x^4 - 2ax^3 + abxy - aayy$ ſe changera en celle ci, $2aaby - aayy$: diviſez-là par le quarré aa, & vous aurez en moindres termes cette autre puiſſance à égaler au quarré, $2by - yy$, pour le côté duquel prenant $\frac{cy}{d}$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $2by - yy \gtrless \frac{ccyy}{dd}$, on trouvera $y \gtrless \frac{2bdd}{cc+dd}$;

&

& au lieu de la puiſſance propoſée $x^4-2ax^3+abxy-aayy$, on aura ce quarré $\frac{4aabbccdd}{c^4+2ccdd+d^4}$, dont le côté eſt $\frac{2abcd}{cc+dd}$.

Parce que nous avons ſuppoſé $a\propto 1$, & $b\propto 6$, on trouvera $x\propto 2$, & ſi l'on ſuppoſe $c\propto 1$, & $d\propto 1$, on trouvera $y\propto 6$, & la puiſſance propoſée, $x^4-2ax^3+abxy-aayy$ ſe changera en ce quarré 36, dont le côté eſt 6.

Ou bien ſans détruire aucun terme, égalez la puiſſance propoſée $x^4-2ax^3+abxy-aayy$, au quarré $x^4-2ax^3+a^3x+\frac{1}{4}a^4$, dont le côté eſt $xx...ax...\frac{1}{2}aa$, pour avoir $x\propto\frac{4ayy+a^3}{4by-4aa}$, où l'on voit que la quantité indéterminée y doit être plus grande que $\frac{aa}{b}$.

Parce que nous avons ſuppoſé $a\propto 1$, & $b\propto 6$, ſi l'on ſuppoſe $y\propto 1$, ou $y\propto\frac{1}{2}$, on trouvera $x\propto\frac{1}{4}$, & la puiſſance propoſée $x^4-2ax^3+abxy-aayy$, ſe changera en ce quarré $\frac{361}{256}$, dont le côté eſt $\frac{19}{16}$.

On peut auſſi égaler la puiſſance propoſée, $x^4-2ax^3+abxy-aayy$, au quarré x^4, & alors on trouvera $y\propto\frac{bx+x\sqrt{bb-8ax}}{2a}$, ou $y\propto bx-x\sqrt{bb-8ax}$. Ainſi l'on aura cette nouvelle puiſſance à égaler au quarré, $bb-8ax$, pour le côté duquel prenant c, en ſorte qu'on ait cette Equation, $bb-8ax\propto cc$, on trouvera $x\propto\frac{bb-cc}{8a}$, & par conſéquent $y\propto\frac{b^3+c^3-bbc-bcc}{16aa}$; ou bien $y\propto\frac{b^3-c^3+bbc-bcc}{16aa}$, où l'on voit que c doit être moindre que b.

Parce que nous avons ſuppoſé $a\propto 1$, & $b\propto 6$, ſi l'on ſuppoſe $c\propto 4$, on trouvera $x\propto\frac{1}{2}$, & $y\propto\frac{1}{2}$, ou bien

bien $y \gtrless \frac{x}{5}$, & la Puiſſance propoſée, $x^4 - 2ax^3 + abxy - aayy$, ſe changera en celle-ci, $\frac{625}{16}$, dont la Racine quarrée eſt $\frac{25}{4}$.

Solution plus générale.

Pour avoir une ſolution plus générale, ſuppoſez $x \gtrless \frac{cy}{d}$, & au lieu de la Puiſſance propoſée, $x^4 - 2ax^3 + abxy - aayy$, vous aurez en entiers & en moindres termes celle ci à égaler au quarré, $c^4yy - 2ac^3dy + abcd^3 - aad^4$, pour le côté duquel prenant $ccy - adm$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $c^4yy - 2ac^3dy + abcd^3 - aad^4 \gtrless c^4yy - 2accdmy + aaddmm$, on trouvera $y \gtrless \frac{ad^3 + admm - bcdd}{2ccm - 2c^3}$, & par conſéquent $x \gtrless \frac{acdd + acmm - bcdd}{2ccm - 2c^3}$.

Parce que nous avons ſuppoſé $a \gtrless 1$, & $b \gtrless 6$, ſi l'on ſuppoſe $c \gtrless 4$, $d \gtrless 1$, & $m \gtrless 5$, on trouvera $x \gtrless \frac{1}{4}$, & $y \gtrless \frac{1}{16}$, & la Puiſſance propoſée $x^4 - 2ax^3 + abxy - aayy$ ſe changera en ce quarré $\frac{1}{16}$, dont le côté eſt $\frac{1}{4}$.

Second Exemple.

Pour égaler au quarré cette Puiſſance $ax^3 - 2aabx + xxyy + abxz - aazz$, on fera évanoüir les deux termes $2aabx$, $abxz$, qui ſont de contraire affection, par cette Equation, $abxz - 2aabx \gtrless 0$: & auſſi les deux $xxyy$, $aazz$, qui ſont pareillement de contraire affection, par cette Equation, $xxyy - aazz \gtrless 0$. Ainſi on aura ces deux Equations à reſoudre;

$$abxz - 2aabx \gtrless 0.$$

$$xxyy - aazz \gtrless 0.$$

Dans la premiere $abxz - 2aabx \gtrless 0$, on trouvera $z \gtrless 2a$, & dans la ſeconde $xxyy - aazz \gtrless 0$, on trouvera le même $z \gtrless \frac{xy}{a}$. Ainſi on aura cette troiſiéme Equation, $\frac{xy}{a} \gtrless 2a$, dans laquelle on trouvera $y \gtrless \frac{2aa}{x}$.

&

& la Puiſſance propoſée $ax^3-2aabx+xxyy+abxz-aazz$ ſe changera en celle-ci, ax^3, laquelle etant égalée au quarré $ccxx$, on trouvera $x \propto \frac{cc}{a}$, & au lieu de $y \propto \frac{2aa}{x}$, on aura $y \propto \frac{2a^3}{cc}$, & au lieu de la Puiſſance propoſée, $ax^3-2aabx+xxyy+abxz-aazz$, on aura ce quarré $\frac{c^6}{aa}$, dont le côté eſt $\frac{c^3}{a}$.

Solution plus générale.

Pour avoir une ſolution plus générale, égalez la Puiſſance précedente ax^3 au quarré $\frac{ccx^4}{dd}$ pour avoir $x \propto \frac{add}{cc}$, & au lieu de $y \propto \frac{2aa}{x}$, on aura $y \propto \frac{2acc}{dd}$, & la Puiſſance propoſée $ax^3-2aabx+xxyy+abxz-aazz$ ſe changera en ce quarré $\frac{a^4d^6}{c^6}$ dont le côté eſt $\frac{aad^3}{c^3}$.

On peut ſeulement faire évanoüir les deux derniers termes $abxz$, $aazz$, qui ſont de differente affection, par cette Equation, $abxz-aazz \propto 0$, dans laquelle on trouvera en entiers $x \propto a$, & $z \propto b$, & au lieu de la Puiſſance propoſée, $ax^3-2aabx+xxyy+abxz-aazz$, on aura en moins & en moindres termes celle-ci à égaler au quarré, $aa-2ab+yy$, pour le côté duquel prenant $y \ldots c$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $aa-2ab+yy \propto yy-2cy+cc$, on trouvera $y \propto \frac{cc-aa+2ab}{2c}$, & la Puiſſance propoſée, $ax^3-2aabx+xxyy+abxz-aazz$, ſe changera en ce quarré, $\frac{a^2c^4+2a^4cc+a^6-4a^3bcc-4a^5b+4a^4bb}{acc+a^3-2aab \quad 4cc}$, dont le côté eſt $\frac{}{2c}$.

Ou bien on peut ſeulement faire évanoüir les deux termes $2abx$, $abxz$, par cette Equation, $abxz-$

$2aabx \gtrless 0$, dans laquelle on trouvera $z \gtrless 2a$, & la Puiſſance propoſée $ax^3 - 2aabx + xxyy + abxz - aazz$, ſe changera en celle-ci, $ax^3 + xxyy - 4a^3$, laquelle étant égalée au quarré $xxyy - 2acxy + aacc$, dont le côté eſt $xy...ac$, on trouvera $y \gtrless \frac{4a^3 + acc - x^3}{2cx}$, & au lieu de la Puiſſance propoſée $ax^3 + xxyy + abxz - 2aabx - aazz$ on aura ce quarré, $\frac{x^6 + 2accx^3 + aac^4 - 8a^3x^3 - 8a^4cc + 16a^6}{4cc}$ dont le côté eſt $\frac{x^3 + acc...4a^3}{2c}$.

Ou bien enfin on peut ſeulement détruire les deux termes $xxyy, aazz$, par cette Equation, $xxyy - aazz \gtrless 0$, dans laquelle on trouvera $z \gtrless \frac{xy}{a}$, & la Puiſſance propoſée, $ax^3 - 2aabx + xxyy + abxz - aazz$: ſe changera en celle-ci, $ax^3 - 2aabx + bxxy$, laquelle étant égalée au quarré $ccxx$, dont le côté eſt cx, on trouvera $y \gtrless \frac{ccx + 2aab - axx}{bx}$, & au lieu de $z \gtrless \frac{xy}{a}$, on aura $z \gtrless \frac{ccx + 2aab - axx}{ab}$, & au lieu de la Puiſſance propoſée $ax^3 - 2aabx + xxyy + abxz - aazz$, ſe changera en ce quarré $ccxx$, dont le côté eſt cx.

Troiſiéme Exemple.

Pour égaler au quarré cette Puiſſance, $x^6 - 2x^3y^3 + y^6 - 8a^3x^3 - 8a^3y^3$, ſuppoſez $x \gtrless z + b$, & $y \gtrless z - b$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $36bbz^4 - 16a^3z^3 + 24b^4zz - 48a^3bbz + 4b^6$, pour le côté duquel prenant $2b^3 - \frac{12a^3z}{b} + 6bzz$, on trouvera $z \gtrless \frac{9a^3}{6b}$, & au lieu de $x \gtrless z + b$, & de $y \gtrless z - b$, on aura $x \gtrless \frac{9a^3 + 8b^3}{8bb}$, & $y \gtrless \frac{9a^3 - 8b^3}{8bb}$.

Si

Si $a \propto 2$, & $b \propto 1$, on trouvera $x \propto 10$, & $y \propto 8$, & la Puiſſance propoſée $x^6 - 2x^3y^3 + y^6 - 8a^3x^3 - 8a^3y^3$, ſe changera en celle-ci, 141376, dont la Racine quarrée eſt 376.

Quatriéme Exemple.

Pour égaler au quarré cette Puiſſance $ax^3 + ay^3 + ab^3 + 3a^4$, ſuppoſez $x \propto z - y$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $3ayyz - 3ayzz + az^3 + ab^3 + 3a^4$. Egalez auparavant le premier terme $3ayyz$ au quarré indéterminé $ddyy$, pour avoir $z \propto \frac{3dd}{a}$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $9aaddyy - 27ad^4y + 27d^6 + a^3b^3 + 3a^6$, pour le côté duquel prenant $3ady \ldots aac$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $9aaddyy - 27ad^4y + 27d^6 + a^3b^3 + 3a^6 \propto 9aaddyy - 6a^3cdy + a^4cc$, on trouvera $y \propto \frac{a^4cc - 27d^6 - a^3b^3 - 3a^6}{6a^3cd - 27ad^4}$, & par conſéquent $x \propto \frac{18aacd^3 - 54d^6 - a^4cc + a^3b^3 + 3a^6}{6a^3cd - 27ad^4}$.

Si $a \propto 1$, & $b \propto 1$, & qu'on ſuppoſe $c \propto 6$, & $d \propto 1$, on trouvera $y \propto \frac{5}{9}$, $z \propto 3$, & $x \propto \frac{22}{9}$, & la Puiſſance propoſée, $ax^3 + ay^3 + ab^3 + 3a^4$, ſe changera en ce quarré $-\frac{169}{9}$, dont le côté eſt $\frac{13}{3}$.

Si vous voulez une autre ſolution, égalez la Puiſſance précedente $9aaddyy - 27ad^4y + 27d^6 + a^3b^3 + 3a^6$, au quarré $9aaddyy + 6a^3cdy + a^4cc$, dont le côté eſt $3ady + aac$, & vous trouverez $y \propto \frac{27d^6 + a^3b^3 + 3a^6 - a^4cc}{6a^3cd + 27ad^4}$, & à cauſe de $z \propto \frac{3dd}{a}$, & de $x \propto z - a$, on aura $x \propto \frac{54d^6 + 18aacd^3 - a^3b^3 - 3a^6 + a^4cc}{6a^3cd + 27ad^4}$.

Parce que nous avons ſuppoſé $a \propto 1$, & $b \propto 1$, ſi l'on ſuppoſe $c \propto 1$, & $d \propto 1$, on trouvera $z \propto 3$, $y \propto \frac{10}{11}$, & $x \propto \frac{21}{11}$, & la Puiſſance propoſée $ax^3 + ay^3 + ab^3 + 3a^4$,

$3a^4$, ſe changera en ce quarré $\frac{1681}{121}$, dont le côté eſt $\frac{41}{11}$.

La Puiſſance propoſée $ax^3+ay^3+ab^3+3a^4$ ſe peut autrement rendre quarrée, ſçavoir en l'égalant au quarré $4a^4$, & alors on trouvera cette Equation, $x^3+y^3 \propto a^3-b^3$, qui fait connoître que pour les deux cubes x^3, y^3, il faut trouver deux cubes, dont la ſomme ſoit égale à la difference de deux cubes donnez, tels que ſont ici les deux cubes a^3, b^3, ce qui ſe fera en cette ſorte.

Suppoſez $x \propto a-z$, & $y \propto \frac{cz}{d}-b$, & l'Equation précedente $x^3+y^3 \propto a^3-b^3$, ſe changera en celle-ci, $\frac{c^3z^3}{d^3}-z^3+3azz-\frac{3bcczz}{dd}-3aaz+\frac{3bbcz}{d}+a^3-b^3 \propto a^3-b^3$, laquelle ſe reduit à celle-ci, $zz+\frac{3ad^3z-3bccdz}{c^3-d^3} \propto \frac{3aad^3-3bbcdd}{c^3-d^3}$. Suppoſez $3aad^3 \propto 3bbcdd$, pour faire évanoüir l'Homogéne de comparaiſon, afin que l'Equation ſe puiſſe diviſer par z, & qu'ainſi la valeur de z ſe trouve rationnelle: & dans cette Equation ſuppoſée, vous trouverez $d \propto bb$, & $c \propto aa$, & l'Equation précedente $zz+\frac{3ad^3z-3bccdz}{c^3-d^3} \propto \frac{3aad^3-3bbcdd}{c^3-d^3}$, ſe changera en celle-ci, $zz-\frac{3ab^3z}{a^3+b^3} \propto o$, dans laquelle on trouvera $z \propto \frac{3ab^3}{a^3+b^3}$, & au lieu de $x \propto a-z$, & de $y \propto \frac{cz}{d}-b$, on aura $x \propto \frac{a^4-2ab^3}{a^3+b^3}$, & $y \propto \frac{2a^3b-b^4}{a^3+b^3}$.

Si $a \propto 2$, & $b \propto 1$, on trouvera $x \propto \frac{4}{3}$, & $y \propto \frac{5}{3}$, & la Puiſſance propoſée, $ax^3+ay^3+ab^3+3a^4$, ſe changera en ce quarré 64, dont le côté eſt 8.

On voit aiſément qu'en égalant de cette façon au quarré la Puiſſance propoſée $ax^3+ay^3+ab^3+3a^4$, on

trouve

trouve trois cubes, dont la ſomme eſt un cube : car dans l'Equation précedente $x^3+y^3 \propto a^3-b^3$, on a $x^3+y^3+b^3 \propto a^3$. Ainſi b^3 eſt le troiſiéme cube, lequel avec les deux x^3, y^3, eſt égal au cube a^3: & les côtez de ces trois cubes égaux à un cube ſeront en entiers de cette grandeur,

$$2a^3b-b^4.$$
$$a^4-2ab^3.$$
$$a^3b+b^4.$$

& le côté du cube égal ſera de cette grandeur,

$$a^4+ab^3.$$

de ſorte que les trois cubes ſeront tels,

$$8a^9b^3-12a^6b^6+6a^3b^9-b^{12}.$$
$$a^{12}-6a^9b^3+12a^6b^6-8a^3b^9.$$
$$a^9b^3+3a^6b^6+3a^3b^9+b^{12}.$$

dont la ſomme eſt $a^{12}+3a^9b^3+3a^6b^6+a^3b^9$, qui a ſa Racine cubique a^4+ab^3.

Parce que nous avons ſuppoſé $a \propto 2$, & $b \propto 1$, les côtez des trois cubes ſeront 5, 4, 3, & les cubes ſeront 125, 64, 27, dont la ſomme 216 a ſa Racine cubique 6.

Ces trois côtez ſe peuvent auſſi exprimer ainſi,

$$a^4-ab^3.$$
$$a^3b-b^4.$$
$$2a^3b+b^4.$$

de ſorte que les trois cubes ſeront tels,

$$a^{12}-3a^9b^3+3a^6b^6-a^3b^9.$$
$$a^9b^3-3a^6b^6+3a^3b^9-b^{12}.$$
$$8a^9b^3+12a^6b^6+6a^3b^9+b^{12}.$$

dont la ſomme $a^{12}+6a^9b^3+12a^6b^6+8a^3b^9$, a ſa Racine cubique a^4+2ab^3.

Parce que nous avons ſuppoſé $a \propto 2$, & $b \propto 1$, les côtez des trois cubes ſeront 14, 7, 17, & les cubes ſeront 2744, 343, 4913, dont la ſomme 8000 a ſa Racine cubique 20.

On peut exprimer les côtez de ces trois cubes en plusieurs autres manieres, & même trouver plus de trois cubes, dont la somme soit un cube, mais ce n'est pas ici le lieu d'en dire davantage. Nous en parlerons plus particulierement dans les Questions que nous ajoûterons à la fin.

Cinquiéme Exemple.

Pour égaler au quarré cette Puissance, $xx+2xy$, prenez $x...c$, pour le côté de ce quarré, lequel par conséquent sera $xx-2cx+cc$; & vous aurez cette Equation, $xx+2xy \mathrel{)\!(} xx-2cx+cc$, dans laquelle vous trouverez $x \mathrel{)\!(} \frac{cc}{2c+2y}$, ou $y \mathrel{)\!(} \frac{cc-2cx}{2x}$, car les deux quantitez x, y, étant indéterminées, il est libre de retenir celle que l'on voudra. En retenant x, & en mettant à la place de y sa valeur trouvée $\frac{cc-2cx}{2x}$, où l'on voit que x doit être moindre que $\frac{1}{2}c$, la Puissance proposée, $xx+2xy$, se changera en ce quarré, $xx-2cx+cc$, dont le côté est $x...c$. Mais en retenant y, & en mettant à la place de x, sa valeur trouvée $\frac{cc}{2c+2y}$, qui ne soufre aucune détermination, la Puissance proposée $xx+2xy$, se changera en ce quarré, $\frac{c^4+4c^3y+4ccyy}{4cc+8cy+4yy}$, dont le côté est $\frac{cc+2cy}{2c}+2y$.

Solution en entiers.

Si vous voulez une solution en entiers, égalez la Puissance proposée $xx+2xy$, au quarré $xx-\frac{2bxy}{c}+\frac{bbyy}{cc}$, dont le côté est $x...\frac{by}{c}$, par cette Equation, $xx+2xy \mathrel{)\!(} xx-\frac{2bxy}{c}+\frac{bbyy}{cc}$, laquelle se reduit à celle-ci, $2ccx+2bcx \mathrel{)\!(} bby$, où les deux quantitez indéterminées

nées x, y, ſe trouvent châcune d'un même côté dans tous les termes, l'une à la droite, & l'autre à la gauche, cela fait que pour la quantité inconnuë x, on peut prendre celle qui multiplie l'autre quantité inconnuë y, ſçavoir bb: & reciproquement on peut prendre pour la quantité inconnuë y, celle qui multiplie l'autre quantité inconnuë x, ſçavoir $2cc+2bc$. Si donc on ſuppoſe $x \propto 2cc+2bc$, & $y \propto bb$, la Puiſſance propoſée $xx+2xy$, ſe changera en ce quarré, $b^4+4b^3c+4bbcc$, dont le côté eſt $bb+2bc$.

Ou bien égalez la Puiſſance propoſée $xx+2xy$ au quarré $\frac{bbxx}{cc}$, dont le côté eſt $\frac{bx}{c}$, & vous trouverez en entiers, $x \propto 2cc$, & $y \propto bb-cc$, & la Puiſſance propoſée $xx+2xy$, ſe changera en ce quarré, $4bbcc$, dont le côté eſt $2bc$.

Sixiéme Exemple.

Pour égaler au quarré cette Puiſſance ax^3+ay^3, dont les deux nombres produiſans ſont $ax+ay$, & $xx-xy+yy$; on les égalera chacun à un nombre quarré, en cette ſorte.

Egalez le premier $ax+ay$ au quarré $xx+2xy+yy$, pour avoir $y \propto a-x$, & au lieu du ſecond $xx-xy+yy$, vous aurez celui-ci à égaler au quarré, $aa-3ax+3xx$, pour le côté duquel prenant $a \ldots \frac{bx}{c}$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $aa-3ax+3xx \propto aa-\frac{2abx}{c}+\frac{bbxx}{cc}$, on trouvera $x \propto \frac{3acc-2abc}{3cc-bb}$, & au lieu de $y \propto a-x$, on aura $y \propto \frac{2abc-abb}{3cc-bb}$: & en négligeant le Dénominateur commun $3cc-bb$, ce qui ſe peut faire ici, parce que les deux termes de la Puiſſance propoſée ſont homogénes, on aura en entiers $x \propto 3acc-2abc$, & $y \propto 2abc-abb$, & la Puiſſance propoſée ax^3+ay^3, ſe chan-

gera en ce quarré, $9a^4c^4-18a^4bc^3+15a^4bbcc-6a^4b^3c+a^4b^4$, dont le côté eſt $3aacc-3aabc+aabb$.

Ou bien ſuppoſez $y \propto \frac{bx}{c}$, & au lieu de la puiſſance propoſée, ax^3+ay^3, vous aurez celle-ci, $\frac{ab^3x^3}{c^3}+ax^3$: multipliez-la par le nombre quarré $\frac{c^4}{xx}$, pour avoir en entiers & en moindres termes cette autre puiſſance à égaler au quarré, ab^3cx+ac^4x, pour le côté duquel prenant ddx, en ſorte qu'on ait cette Equation, $ab^3cx+ac^4x \propto d^4xx$, l'on trouvera $x \propto \frac{ab^3c+ac^4}{d^4}$, & par conſéquent $y \propto \frac{abc^3+ab^4}{d^4}$, & en negligeant pareillement le Dénominateur commun d^4, ou aura en entiers, $x \propto ab^3c+ac^4$, & $y \propto abc^3+ab^4$, & la puiſſance propoſée ax^3+ay^3, ſe changera en ce quarré, $a^4c^{12}+4a^4b^3c^9+6a^4b^6c^6+4a^4b^9c^3+a^4b^{12}$, dont le côté eſt $aac^6+2aab^3c^3+aab^6$, qui a encore ſa Racine quarrée ac^3+ab^3.

Parce que la puiſſance précedente ab^3cx+ac^4x, a ces deux nombres produiſans acx, b^3+c^3, on les égalera enſemble, par cette Equation, $acx \propto b^3+c^3$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{b^3+c^3}{ac}$, & par conſéquent $y \propto \frac{b^4+bc^3}{acc}$: & ſi on multiplie ces deux dernieres valeurs trouvées par le nombre quarré $aacc$, on aura en entiers $x \propto ab^3c+ac^4$, & $y \propto ab^4+abc^3$, comme auparavant.

On peut autrement égaler au quarré la puiſſance propoſée, ax^3+ay^3, & avoir une ſolution, plus générale, en égalant autrement au quarré ſes deux nombres produiſans, $ax+ay$, $xx-xy+yy$, en cette ſorte.

Egalez le ſecond nombre produiſant $xx-xy+yy$, au quarré $xx-\frac{2bxy}{c}+\frac{bbyy}{cc}$, & vous aurez $y \propto \frac{2bcx-ccx}{bb-cc}$, &

au

au lieu du premier nombre produiſant $ax+ay$, vous aurez celui-ci, $\frac{abbx+2abcx-2accx}{bb-cc}$, lequel étant égalé au quarré $\frac{mmxx}{dd}$, dont le côté eſt $\frac{mx}{d}$, on trouvera $x \gg \frac{abbdd+2abcdd-2accdd}{bbmm-ccmm}$, & par conſéquent $y \gg \frac{2ab^3cdd+3abbccdd-6abc^3dd+2ac^4dd}{b^4mm-2bbccmm+c^4mm}$: & en multipliant chacune de ces deux valeurs trouvées par le quarré $\frac{b^4mm-2bbccmm+c^4mm}{dd}$, on aura en entiers $x \gg ab^4+2ab^3c-3abbcc-2abc^3+2ac^4$, & $y \gg 2ab^3c+3abbcc-6abc^3+2ac^4$.

Si $a \gg 1$, & qu'on ſuppoſe $b \gg 2$, & $c \gg 1$, on trouvera $x \gg 18$, & $y \gg 18$, & la puiſſance propoſée, ax^3+ay^3 ſe changera en ce quarré 11664, dont le côté eſt 108. Mais ſi l'on ſuppoſe $b \gg 3$, & $c \gg 1$, on trouvera $x \gg 104$, & $y \gg 65$, & la puiſſance propoſée, ax^3+ay^3, ſe changera en ce quarré 1399489, dont le côté eſt 1183.

On peut encore autrement rendre quarrée la puiſſance propoſée, ax^3+ay^3, en ſuppoſant $y \gg a-x$, pour avoir cette autre puiſſance à égaler au quarré, $a^4-3a^3x+3aaxx$, pour le côté duquel prenant $a \ldots bx$, on trouvera $x \gg \frac{3a^3-2aab}{3aa-bb}$, & par conſéquent $y \gg \frac{2aab-abb}{3aa-bb}$: & pour avoir une ſolution en entiers, multipliez chacune de ces deux valeurs trouvées par le quarré $9a^4-6aabb+b^4$ du Dénominateur commun $3aa-bb$, & vous aurez $x \gg 9a^5-6a^4b-3a^3bb+2aab^3$, & $y \gg 6a^4b-3a^3bb-2aab^3+ab^4$.

Parce que nous avons ſuppoſé $a \gg 1$, ſi l'on ſuppoſe $b \gg 1$, on trouvera $x \gg 2$, & $y \gg 2$, & la puiſſance propoſée ax^3+ay^3, ſe changera en ce quarré 16, dont le côté

côté eſt 4. Mais ſi l'on ſuppoſe $b \propto \frac{1}{7}$, on trouvera $x \propto 88$, & $y \propto 33$, & la puiſſance propoſée ax^3+ay^3, ſe changera en ce quarré 717409, dont le côté eſt 847.

Septiéme Exemple.

Pour égaler au quarré cette puiſſance, $axyy-ayyz+bxyz-byz\omega$, on la diviſera par $xy-yz$, qui ſera l'un de ſes deux nombres produiſans, & le quotient $ay-bz$ ſeroit l'autre nombre produiſant, s'il ne reſtoit rien de la Diviſion: & afin qu'il ne reſte rien, il faut faire évanouïr le reſte, qui eſt $byzz-byz\omega$, par cette Equation, $byzz-byz\omega \propto 0$, dans laquelle on trouvera $\omega \propto z$. Si donc on met z à la place de ω, la puiſſance propoſée $axyy-ayyz+bxyz-byz\omega$, ſe changera en celle-ci, $axyy-ayyz+bxyz-byzz$, qui a ces deux nombres produiſans $xy-yz$, $ay+bz$, qu'on égalera enſemble, par cette Equation, $xy-yz \propto ay+bz$, dans laquelle on trouvera $x \propto a+z+\frac{bz}{y}$, & la puiſſance propoſée $axyy-ayyz+bxyz-byz\omega$, ſe changera en ce quarré $aayy+2abyz+bbzz$, dont le côté eſt $ay+bz$.

Ou bien faites évanouïr les deux termes $axyy$, $ayyz$, qui ſont de contraire affection, par cette Equation, $axyy-ayyz \propto 0$, dans laquelle on trouvera $x \propto z$, & la puiſſance propoſée $axyy-ayyz+bxyz-byz\omega$, ſe changera en celle-ci, $byzz-byz\omega$, laquelle étant égalée au quarré $ccyy$, dont le côté eſt cy, on trouvera $\omega \propto \frac{bzz-ccy}{bz}$: & au lieu de la puiſſance propoſée $axyy-ayyz+bxyz-byz\omega$, on aura ce quarré $ccyy$, dont le côté eſt cy.

Solution en entiers.

Pour avoir une ſolution en entiers, égalez la puiſſance reduite $byzz-byz\omega$, au quarré $cczz$, dont le côté eſt

eſt cz, & vous trouverez $z \propto by$, & $\omega \propto by - cc$, & la puiſſance propoſée $axyy - ayyz + bxyz - byz\omega$, ſe changera en ce quarré $bbccyy$, dont le côté eſt bcy.

On peut auſſi faire évanouïr les deux derniers termes $bxyz$, $byz\omega$, par cette Equation, $bxyz - byz\omega \propto o$, dans laquelle on trouvera $\omega \propto x$, & la puiſſance propoſée $axyy - ayyz + bxyz - byz\omega$, ſe reduira à celle-ci, $axyy - ayyz$, laquelle étant égalée à ce quarré $ddyy$, dont le côté eſt dy, on trouvera $z \propto \frac{ax - dd}{a}$, & la puiſſance propoſée $axyy - ayyz + bxyz - byz\omega$ ſe changera en ce quarré $ddyy$, dont le côté eſt dy.

On peut encore faire évanouïr les deux termes $ayyz$, $bxyz$, par cette Equation, $bxyz - ayyz \propto o$, dans laquelle on trouvera en entiers $x \propto a$, & $y \propto b$, & au lieu de la puiſſance propoſée $axyy - ayyz + bxyz - byz\omega$, on aura celle-ci à égaler au quarré, $aabb - abb\omega$, pour le côté duquel prenant bc, en ſorte qu'on ait cette Equation $aabb - abb\omega \propto bbcc$, on trouvera $\omega \propto \frac{aa - cc}{a}$, & la puiſſance propoſée $axyy - ayyz + bxyz - byz\omega$, ſe changera en ce quarré, $bbcc$, dont le côté eſt bc.

Enfin on peut égaler à tel quarré indéterminé que l'on voudra, la puiſſance propoſée $axyy - ayyz + bxyz - byz\omega$, comme au quarré $ccdd$, par cette Equation, $axyy - ayyz + bxyz - byz\omega \propto ccdd$, dans laquelle on trouvera $\omega \propto \frac{axyy - ayyz + bxyz}{byz}$, & la puiſſance propoſée $axyy - ayyz + bxyz - byz\omega$, ſe changera en ce quarré $ccdd$, dont le côté eſt cd.

Huitiéme Exemple.

Pour égaler au quarré cette puiſſance, $xxyz - cdxy + cdyy$, dont les deux nombres produiſans ſont y, $xxz - cdx + cdy$, que l'on pourroit égaler enſemble, ſi on ne vouloit pas obſerver la loi des homogénes, parce qu'ils

ſont

ſont heterogénes, & alors on trouveroit $y \propto \frac{cdx-xxz}{cd-1}$, & la puiſſance propoſée $xxyz-cdxy+cdyy$ ſe changeroit en ce quarré, $\frac{x^4zz-2cdx^3z+ccddxx}{ccdd-2cd+1}$, dont le côté eſt $\frac{xxz \ldots cdx}{cd-1}$

Mais ſi l'on veut ſuivre la loi des homogénes, ce qui eſt toûjours plus élegant, plus général, & plus commode, multipliez le premier nombre produiſant y, qui eſt le plus bas, par le quarré indéterminé $\omega\omega$, pour le rendre homogéne & l'égalez au ſecond $xxz-cdx+cdy$, par cette Equation, $\omega\omega y \propto xxz-cdx+cdy$, dans laquelle on trouvera $z \propto \frac{\omega\omega y+cdx-cdy}{xx}$, & la puiſſance propoſée $xxyz-cdxy+cdyy$, ſe changera en celle-ci, $yy\omega\omega$, dont la Racine quarrée eſt $y\omega$.

La puiſſance propoſée $xxyz-cdxy+cdyy$, ſe peut autrement égaler au quarré, ſçavoir en égalant premierement au quarré le premier terme $xxyz$, comme par exemple au quarré $\frac{aaxxyy}{bb}$, dont le côté eſt $\frac{axy}{b}$. & alors vous trouverez $z \propto \frac{aay}{bb}$, & la puiſſance propoſée $xxyz-cdxy+cdyy$ ſe reduira à celle-ci, $\frac{aaxxyy}{bb}-cdxy+cdyy$, laquelle étant égalée à ce quarré $\frac{aaxxyy}{bb}-\frac{2amxyy}{b}+mmyy$, dont le côté eſt $\frac{axy}{b} \ldots my$, on trouvera $y \propto \frac{bcdx}{bcd+2amx-bmm}$, & au lieu de $z \propto \frac{aay}{bb}$, on aura $z \propto \frac{aacdx}{bbcd+2abmx-bbmm}$.

Si $c \propto 2$, & $d \propto 4$, & que l'on ſuppoſe $a \propto 3$, $b \propto 2$, $m \propto 2$,

$m \propto 2$, & $x \propto 6$, on trouvera $y \propto \frac{6}{7}$, & $z \propto \frac{11}{10}$, & la puiſſance propoſée $xxyz - cdxy + ddyy$, ſe changera en ce quarré $\frac{176}{1764}$, dont le côté eſt $\frac{42}{7}$.

Neuviéme Exemple.

Pour égaler au quarré cette puiſſance, $2xxyy + 2xxzz + 2yyzz - x^4 - y^4 - z^4$, qui a ces quatre nombres produiſans,

$$x+y+z.$$
$$x+y-z.$$
$$x-y+z.$$
$$-x+y+z.$$

rendez ces quatre nombres produiſans proportionnels, en égalant le produit des deux extrêmes à celui des deux moyens, par cette Equation, $zz+2yz+yy-xx \propto xx-yy+2yz-zz$, dans laquelle on trouvera $z \propto \sqrt{xx-yy}$. Ainſi l'on aura cette puiſſance à égaler au quarré, $xx-yy$, pour le côté duquel prenant $x \ldots \frac{ay}{b}$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $xx-yy \propto xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb}$, on trouvera en entiers $x \propto aa+bb$, & $y \propto 2ab$, & par conſéquent $z \propto aa \ldots bb$.

Si $a \propto 2$, & $b \propto 1$, on trouvera $x \propto 5$, $y \propto 4$, & $z \propto 3$, & la puiſſance propoſée $2xxyy+2xxzz+2yyzz-x^4-y^4-z^4$, ſe changera en ce quarré 576, dont le côté eſt 24.

Ou bien on pourroit égaler enſemble les quatre nombres produiſans, mais comme cela ne ſe peut pas ici faire, multipliez chacun de ces quatre nombres produiſans par un quarré indéterminé, ſçavoir le premier $x+y+z$ par le quarré aa, le deuxiéme $x+y-z$ par le quarré bb, le troiſiéme $x-y+z$ par le quarré cc, & le quatriéme $-x+y+z$ par le quarré dd, pour avoir en leur place ces quatre produits,

$aax+aay+aaz.$
$bbx+bby-bbz.$
$ccx-ccy+ccz.$
$-ddx+ddy+ddz.$

que vous égalerez enſemble par ces trois Equations,

$aax+aay+aaz \gtrless bbx+bby-bbz.$
$ccx-ccy+ccz \gtrless -ddx+ddy+ddz.$
$aax+aay+aaz \gtrless ccx-ccy+ccz.$

Dans la premiere $aax+aay+aaz \gtrless bbx+bby-bbz$, on trouvera $x \gtrless \frac{bby-aay-aaz-bbz}{aa-bb}$, & dans la ſeconde $ccx-ccy+ccz \gtrless -ddx+ddy+ddz$, on trouvera le même $x \gtrless \frac{ccy+ddy-ccz+ddz}{cc+dd}$; d'où l'on tire cette Equation, $\frac{ccy+ddy-ccz+ddz}{cc+dd} \gtrless \frac{bby-aay-aaz-bbz}{aa-bb}$, dans laquelle on trouvera en entiers $y \gtrless aadd+bbcc$, & $z \gtrless bbcc+bbdd-aacc-aadd$, & par conſéquent $x \gtrless aacc+bbdd$, & la troiſiéme Equation $aax+aay+aaz \gtrless ccx-ccy+ccz$, ſe changera en celle-ci, $2aabbcc+2aabbdd \gtrless 2bbccdd-2aaccdd$, dans laquelle on trouvera $d \gtrless \frac{abc}{\sqrt{bbcc-aabb-aacc}}$, & l'on aura cette puiſſance à égaler au quarré, $bbcc-aabb-aacc$, pour le côté duquel prenant $bc \ldots am$, on trouvera $a \gtrless \frac{2bcm}{bb+cc+mm}$, & par conſéquent $d \gtrless \frac{2bcm}{bb+cc-mm}$, &c.

Si l'on ſuppoſe $b \gtrless 1$, $c \gtrless 2$, & $m \gtrless 1$, on trouvera $a \gtrless \frac{2}{3}$, $d \gtrless 1$, $x \gtrless \frac{25}{9}$, $y \gtrless \frac{40}{9}$, & $z \gtrless \frac{25}{9}$, & la puiſſance propoſée, $2xxyy+2xxzz+2yyzz-x^4-y^4-z^4$, ſe changera en ce quarré $\frac{160000}{729}$, dont le côté eſt $\frac{400}{27}$.

On peut ici negliger le Dénominateur commun 9, & alors on aura en entiers $x \gtrless 25$, $y \gtrless 40$, & $z \gtrless 25$,

&

& la puiſſance propoſée $2xxyy+2xxzz+2yyzz-x^4-y^4-z^4$ ſe changera en celle-ci, 160000, qui a ſa Racine quarrée 400.

On peut auſſi rendre proportionnels les quatre nombres produiſans, en égalant le produit des deux extrêmes à celui des deux moyens, par cette Equation, $-xx+yy+2yz+zz \propto xx-yy+2yz-zz$, dans laquelle on trouvera $x \propto \sqrt{yy+zz}$. Ainſi l'on aura cette puiſſance à égaler au quarré, $yy+zz$, pour le côté duquel prenant $y \ldots \frac{az}{b}$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $yy+zz \propto yy-\frac{2ayz}{b}+\frac{aazz}{bb}$, l'on trouvera en entiers $y \propto aa-bb$, & $z \propto 2ab$, & par conſéquent $x \propto aa+bb$, & la puiſſance propoſée, $2xxyy+2xxzz+2yyzz-x^4-y^4-z^4$, ſe changera en ce quarré, $16a^6bb-32a^4b^4+16aab^6$, dont le côté eſt $4a^3b \ldots 4ab^3$, qui eſt l'aire de ce triangle rectangle, $2aa+2bb$, $2aa \ldots 2bb$, $4ab$, dont les nombres generateurs ſont $a+b$, $a \ldots b$.

Dixiéme Exemple.

Enfin pour égaler au quarré cette puiſſance $aaxy-bbxy-bbxx-bbyy$, où toutes les lettres repréſentent des nombres indéterminez: concevons que les deux quantitez indéterminées a, b, ſoient connuës, en ſorte que la ſomme des unitez ſoit $aa-3bb$, qu'il faut égaler au quarré, comme au quarré indéterminé $aa-\frac{2abc}{d}+\frac{bbcc}{dd}$, dont le côté eſt $a \ldots \frac{bc}{d}$, pour avoir en entiers $a \propto cc+3dd$, & $b \propto 2cd$, & la puiſſance propoſée, $aaxy-bbxy-bbxx-bbyy$, ſe changera en celle-ci, $c^4xy+2ccddxy+9d^4xy-4ccddxx-4ccddyy$, où la ſomme des unitez fait ce nombre quarré, $c^4-6ccdd+9d^4$, dont le côté eſt $cc \ldots 3dd$, ce qui fait connoître que l'on peut ſuppoſer $y \propto x$: & alors la puiſſance propoſée $aaxy-$

$bbxy-$

$bbxy - bbxx - bbyy$, ſe changera en ce quarré, $c^4xx - 6ccddxx + 9d^4xx$, dont le côté eſt $aax \ldots 3bbx$.

Mais pour avoir une autre ſolution, ſuppoſez $y \propto \omega + x$, & vous aurez cette autre puiſſance à égaler au quarré, $c^4xx - 6ccddxx + 9d^4xx + c^4x\omega - 6ccddx\omega + d^4x\omega - 4ccdd\omega\omega$, pour le côté duquel prenant $ccx \ldots 3ddx \ldots mn\omega$, on trouvera en entiers, $\omega \propto c^4 - 6ccdd + 9d^4 - 6ddmn + 2ccmn$, & $x \propto 4ccdd + mmnn$, & par conſéquent $y \propto c^4 - 2ccdd + 9d^4 - 6ddmn + 2ccmn + mmnn$.

Si l'on ſuppoſe $m \propto 1$, $n \propto 1$, $c \propto \sqrt{\frac{1}{2}}$, & $d \propto \sqrt{\frac{1}{6}}$, on trouvera $a \propto 2$, $b \propto 1$, $\omega \propto 3$, $y \propto 5$, & $x \propto 2$, & la puiſſance propoſée $aaxy - bbxy - bbxx - bbyy$, ſe changera en ce quarré 1, dont le côté eſt 1. Mais ſi l'on ſuppoſe $m \propto 1$, $n \propto 2$, $c \propto 2$, & $d \propto 1$, on trouvera $a \propto 7$, $b \propto 4$, $\omega \propto 1$, $y \propto 5$, & $x \propto 4$, & la puiſſance propoſée $aaxy - bbxy - bbxx - bbyy$, ſe changera en ce quarré 4, dont le côté eſt 2.

PROBLEME VII.

Egaler au quarré une Fraction.

Fraction où la lettre inconnuë n'a qu'une dimenſion.

SI dans la Fraction propoſée, la lettre inconnuë n'a qu'une dimenſion, & qu'elle ſe rencontre ſeulement dans le Numerateur, ou dans le Dénominateur, ou bien dans les deux; on pourra rendre quarrée cette Fraction, en égalant le Numerateur au Dénominateur, après qu'on aura multiplié le plus bas de ces deux par un quarré indéterminé, pour les rendre homogénes, s'ils ne le ſont pas, quand cela ſera poſſible : ou bien en égalant la Fraction propoſée à un quarré indéterminé: ou bien encore en donnant au Numerateur & au Dénominateur la raiſon de deux quarrez.

Comme

Comme pour rendre quarrée cette Fraction $\frac{abx-aab}{a+b}$, où la lettre inconnuë ſe rencontre dans le Numerateur, on pourroit égaler ce Numerateur $abx-aab$, au Dénominateur $a+b$, mais comme ils ne ſont pas homogénes, on multipliera le Dénominateur $a+b$ par le quarré indéterminé cc, & on égalera le produit $acc+bcc$ au Numerateur $abx-aab$, par cette Equation, $acc+bcc \propto abx-aab$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{aab+acc+bcc}{ab}$, & au lieu de la Fraction propoſée $\frac{abx-aab}{a+b}$, on aura ce quarré cc, dont le côté eſt c.

Ou bien égalez la Fraction propoſée $\frac{abx-aab}{a+b}$, au quarré indéterminé cc, & vous trouverez $x \propto \frac{aab+acc+bcc}{ab}$, comme auparavant, ce qui fait voir que cette ſeconde methode eſt équivalente à la premiere.

Ou bien encore donnez au Numerateur & au Dénominateur la raiſon de deux quarrez indéterminez, comme des deux quarrez cc, $ddmm$, par cette analogie, $abx-aab$, $a+b :: ddmm$, cc, d'où l'on tire cette Equation, $abccx-aabcc \propto addmm+bddmm$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{addmm+bddmm+aabcc}{abcc}$, & la Fraction propoſée $\frac{abx-aab}{a+b}$, ſe changera en ce quarré $\frac{ddmm}{cc}$, dont le côté eſt $\frac{dm}{c}$.

Pareillement pour égaler au quarré cette Fraction, $\frac{2x+3a}{3x+4a}$, où la lettre inconnuë ſe rencontre dans le Numerateur & dans le Dénominateur, on l'égalera au quarré indéterminé $\frac{bb}{cc}$, qui lui eſt homogéne, & l'on

trouvera $x \gtrless \frac{3acc-4abb}{3bb-2cc}$, & la Fraction propoſée $\frac{2x+3a}{3x+4a}$ ſe changera en ce quarré $\frac{bb}{cc}$, dont le côté eſt $\frac{b}{c}$.

Ou bien égalez le Numerateur $2x+3a$ au Dénominateur $3x+4a$: mais comme la valeur de x ſe rencontre niée, ſçavoir $-a$, on donnera au Numerateur & au Dénominateur la raiſon de deux quarrez indéterminez, comme des deux quarrez cc, bb, ou bien ce qui eſt la même choſe, on multipliera le Dénominateur $3x+4a$ par le quarré indéterminé bb, & le Numerateur $2x+3a$ par le quarré indéterminé cc, & on égalera enſemble les deux produits, par cette Equation, $3bbx+4abb \gtrless 2ccx+3acc$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless \frac{3acc-4abb}{3bb-2cc}$, comme auparavant.

On peut autrement égaler au quarré une ſemblable Fraction, lorſque la lettre inconnuë ſe rencontre ſeulement dans le Numerateur, ou dans le Dénominateur: ſçavoir en les multipliant enſemble, & en égalant au quarré leur produit.

Ainſi pour égaler au quarré cette Fraction, $\frac{a+b}{abx-aab}$, où la lettre inconnuë eſt dans le Dénominateur, on multipliera ce Dénominateur $abx-aab$ par le Numerateur $a+b$, & on égalera le produit $aabx+abbx-a^3b-aabb$, au quarré indéterminé $ccdd$, & l'on trouvera $x \gtrless \frac{aabb+ccdd+a3b}{aa+abb}$, & au lieu de la Fraction propoſée $\frac{a+b}{abx-aab}$, on aura ce quarré $\frac{aa+2ab+bb}{ccdd}$, dont le côté eſt $\frac{a+b}{cd}$.

Fraction où la lettre inconnuë ſe trouve dans le Numerateur & dans le Denominateur.

Cette methode ſe peut apliquer à une fraction, où la

la lettre inconnuë ſe trouve dans le Numerateur & dans le Dénominateur, pourvû que les quantitez connuës qui multiplient l'inconnuë dans le Numerateur & dans le Dénominateur ſoient des plans ſemblables, de même affection, ou dans la raiſon de deux quarrez, c'eſt-à-dire, pourvû que leur produit ſoit quarré, parce que ce quarré ſervira pour égaler au quarré le produit du Numerateur & du Dénominateur, comme vous allez voir dans l'Exemple ſuivant.

Pour rendre quarrée cette Fraction, $\frac{ax+3ab}{4ax+4ab}$, où les quantitez connuës a, $4a$, qui multiplient l'inconnuë x dans le Numerateur & dans le Dénominateur ſont dans la raiſon des deux quarrez 1, 4, de ſorte que leur produit $4aa$, a ſa Racine quarrée $2a$; multipliez le Numerateur $ax+3ab$ par le Dénominateur $4ax+4ab$, & vous aurez ce produit à égaler au quarré $4aaxx+16aabx+12aabb$, pour le côté duquel prenant $2ax...cd$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $4aaxx+16aabx+12aabb \propto 4aaxx-4acdx+ccdd$, l'on trouvera $x \propto \frac{ccdd-12aabb}{16aab+4acd}$. & la Fraction propoſée $\frac{ax+3ab}{4ax+4ab}$ ſe changera en celle-ci; $\frac{ccdd+12abcd+36aabb}{4ccdd+16abcd+16aabb}$, dont la Racine quarrée eſt $\frac{cd+6ab}{2cd+4ab}$.

Si vous voulez une ſolution plus ſimple, reduiſez la Fraction propoſée $\frac{ax+3ab}{4ax+4ab}$ à moindres termes, ou bien ce qui revient à la même choſe, diviſez le produit $4aaxx+16aabx+12aabb$, par le quarré $4aa$, pour avoir en moindres termes, cet autre produit à égaler au quarré, $xx+4bx+3ab$, pour le côté duquel prenant $x...c$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $xx+4bx+3ab \propto xx-2cx+cc$,

$2cx+cc$, l'on trouvera $x \mathrel{\text{Ø}} \frac{cc-3ab}{4b+2c}$; & la Fraction proposée $\frac{ax+3ab}{4ax+4ab}$, se changera en ce quarré, $\frac{cc+6bc+9bb}{4cc+8bc+4bb}$, dont le côté est $\frac{c+3b}{2c+2b}$.

La même methode servira, quand les termes connus du Numerateur & du Dénominateur seront des plans semblables de même affection, parce que leur produit sera un nombre quarré, qui servira pour égaler au quarré le produit du Numerateur & du Dénominateur, comme vous avez vû dans l'exemple précedent, & comme vous allez encore voir dans le suivant.

Pour rendre quarrée cette Fraction $\frac{5x+2b}{3x+8b}$, où les termes connus $2b$, $8b$, sont des Plans semblables, puisque leur produit $16bb$ est un nombre quarré; multipliez le Numerateur $5x+2b$ par le Dénominateur $3x+2b$, & égalez leur produit $15xx+46bx+16bb$, au quarré $16bb-\frac{8bcx}{d}+\frac{ccxx}{dd}$, dont le côté est $4b \ldots \frac{cx}{d}$. pour avoir $x \mathrel{\text{Ø}} \frac{46bdd+8bcd}{cc-15dd}$, & la Fraction proposée $\frac{5x+2b}{3x+8b}$ se changera en ce quarré $\frac{cc+20cd+100dd}{4cc+12cd+9dd}$, dont le côté est $\frac{c+10d}{2c+3d}$.

On peut encore autrement rendre quarrée une semblable Fraction, sçavoir en égalant séparément au quarré le Numerateur & le Dénominateur, mais il faut que la Fraction proposée ait les conditions semblables à celles des deux exemples précedens, c'est-à-dire, que les quantitez connuës qui multiplient l'inconnuë dans le Numerateur & dans le Dénominateur, ou bien les termes connus dans le Numerateur & dans le Dénominateur soient des Plans semblables de même affection.

Nous

Nous donnerons un exemple de chacun de ces deux cas.

Pour égaler au quarré cette Fraction $\frac{ax+3ab}{4ax+4ab}$, que nous avons déja propoſée auparavant, & que nous n'avons pas reduite à moindres termes, afin que le Numerateur & le Dénominateur demeurent plans, & qu'ainſi en les égalant chacun au quarré, on obſerve la loi des Homogénes, quoique cela ne ſoit pas abſolument neceſſaire dans les nombres; égalez le Numerateur $ax+3ab$, au quarré cc, par cette Equation $ax+3ab \propto cc$, dans laquelle vous trouverez $x \propto \frac{cc-3ab}{a}$. Egalez auſſi le Dénominateur $4ax+4ab$ au quarré $4dd$, par cette deuxiéme Equation, $4ax+4ab \propto 4dd$, dans laquelle vous trouverez le même $x \propto \frac{dd-ab}{a}$, ce qui produit cette troiſiéme Equation, $\frac{cc-3ab}{a} \propto \frac{dd-ab}{a}$, dans laquelle on trouvera $d \propto \sqrt{cc-2ab}$. Ainſi on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $cc-2ab$, pour le côté duquel prenant $c \ldots m$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $cc-2ab \propto cc-2cm+mm$, l'on trouvera $c \propto \frac{2ab+mm}{2m}$, & par conſéquent $d \propto \frac{2ab \ldots mm}{2m}$, & $x \propto \frac{4aabb-8abmm+m^4}{4amm}$, & la Fraction propoſée $\frac{ax+3ab}{4ax+4ab}$ ſe changera en ce quarré, $\frac{4aabb+4abmm+m^4}{16aabb-16abmm+4m^4}$, dont le côté eſt $\frac{2ab+mm}{4ab \ldots 2mm}$.

Pour rendre quarrée cette Fraction, $\frac{ax+2bc}{cx+8bc}$, reduiſez-la en une autre Fraction de même forme que la précedente, ſçavoir où le produit des deux quantitez connuës qui multiplient l'inconnuë dans le Numerateur

merateur & le Dénominateur ſoit un quarré parfait: ce qui ſe fera en égalant la lettre inconnuë x à une Fraction, dont le Numerateur ſoit connu, & le Dénominateur ſoit quelque autre lettre inconnuë, comme par exemple en ſuppoſant $x \propto \frac{ab}{y}$, & alors la Fraction propoſée $\frac{ax+2bc}{cx+8bc}$, ſe changera en celle-ci, $\frac{aab+2bcy}{abc+8bcy}$, que l'on rendra quarrée par une methode ſemblable à la précedente, comme vous allez voir.

Ayant diviſé le Numerateur & le Dénominateur de la Fraction $\frac{aab+2bcy}{abc+8bcy}$ par b, pour avoir en moindres termes cette autre Fraction à égaler au quarré, $\frac{aa+2cy}{ac+8cy}$, égalez le Numerateur $aa+2cy$ au quarré dd, pour avoir $y \propto \frac{dd-aa}{2c}$, & le Dénominateur $ac+8cy$, au quarré mm, pour avoir le même $y \propto \frac{mm-ac}{8c}$, & par conſéquent cette Equation, $\frac{dd-aa}{2c} \propto \frac{mm-ac}{8c}$, dans laquelle on trouvera $m \propto \sqrt{4dd-4aa+ac}$. Ainſi on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $4dd-4aa+ac$, pour le côté duquel prenant $2d \ldots n$, on trouvera $d \propto \frac{4aa-ac+nn}{4n}$, & par conſéquent $m \propto \frac{nn+ac-4aa}{2n}$, & au lieu de $y \propto \frac{dd-aa}{2c}$, ou de $y \propto \frac{mm-ac}{8c}$, l'on aura $y \propto \frac{16a^4-8a^3c+aacc-8aann-2acnn+n^4}{32cnn}$, & au lieu de $x \propto \frac{ab}{y}$, l'on aura $x \propto \frac{32abcnn}{16a^4-8a^3c+aacc-8aann-2acnn+n^4}$, & enfin au lieu de la Fraction propoſée $\frac{ax+2bc}{cx+8bc}$, l'on aura

ce quarré, $\frac{16a^4-8a^3c+aacc-2acnn+8aanx+n^4}{64a^4-32a^3c+4aacc+8acnn-32aann+4n^4}$, dont le côté eſt $\frac{4aa-ac+nn}{8aa-2ac-2nn}$.

On peut auſſi égaler au quarré le Numerateur & le Dénominateur par la methode des Doubles Egalitez de Diophante, comme vous allez voir dans la même Fraction propoſée $\frac{ax+2bc}{cx+8bc}$, où nous avons ces deux Puiſſances à égaler au quarré, qu'il faut changer en

$$ax+2bc.$$
$$cx+8bc.$$

deux autres, où les derniers termes ſoient des quarrez égaux, ce qui ſe fera de la maniere ſuivante, qui n'eſt bonne que pour une Fraction, c'eſt-à-dire que lorſque les deux Puiſſances propoſées repréſentent le Numerateur & le Dénominateur d'une Fraction.

Parce que les deux derniers termes $2bc$, $8bc$, ſont dans la raiſon des deux quarrez 1, 4, on multipliera la premiere Puiſſance $ax+2bc$ par le ſecond quarré 4, & reciproquement la ſeconde Puiſſance $cx+8bc$ par le premier quarré 1, & vous aurez ces deux autres Puiſſances à égaler au quarré, où les deux derniers

$$4ax+8bc.$$
$$cx+8bc.$$

termes ſont bien égaux, mais comme ils ne ſont pas quarrez, on les rendra quarrez en multipliant chaque Puiſſance par le quotient qui vient en diviſant un quarré quelconque par le dernier terme commun $8bc$, comme le quarré $16bbcc$ par $8bc$, & ce quotient ſera $2bc$. Si donc on multiplie chaque Puiſſance par $2bc$, on aura en leur place ces deux dernieres Puiſſances à égaler au quarré,

$$8abcx$$

$$8abcx+16bbcc.$$
$$2bccx+16bbcc.$$

Leur difference eſt $8abcx-2bccx$, dont les deux nombres produiſans ſont $8bc$, $ax-\frac{1}{4}cx$. La moitié de leur ſomme eſt $4bx+\frac{1}{2}ax-\frac{1}{8}cx$, dont le quarré $16bbxx+4abcx+\frac{1}{4}aaxx-bccx-\frac{1}{8}acxx+\frac{1}{64}ccxx$ étant égalé à la plus grande Puiſſance $8abcx+16bbcc$, on trouvera $x \propto \frac{256abc+64bcc}{16aa-8ac+cc}$: & la Fraction propoſée $\frac{ax+2bc}{cx+8bc}$, ſe changera en ce quarré, $\frac{144aa+24ac+cc}{64aa+96ac+36cc}$, dont le côté eſt $\frac{12a+c}{8a+6c}$.

Si vous voulez vous ſervir de la Fraction reduite $\frac{aa+2cy}{ac+8cy}$, vous aurez ces deux Puiſſances à égaler au quarré, qu'il ſuffira de changer en deux autres,

$$8cy+ac.$$
$$2cy+aa.$$

où les deux premiers termes ſoient égaux, ce qui ſe fera par une methode ſemblable à la précedente, comme vous allez voir.

Parce que les deux premiers termes $8cy$, $2cy$, ſont dans la raiſon des deux quarrez 4, 1, on multipliera la premiere Puiſſance $8cy+ac$, par le ſecond quarré 1, & la ſeconde $2cy+aa$, par le premier quarré 4, pour avoir ces deux autres Puiſſances à égaler au quarré,

$$8cy+ac.$$
$$8cy+4aa.$$

Leur difference eſt $ac-aa$, dont les deux nombres produiſans ſont d, $\frac{ac-4aa}{d}$. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{dd+ac-4aa}{2d}$, dont le quarré $\frac{d^4-2acdd+aacc-8aadd.8a^3c+16a^4}{4dd}$, étant égalé à la plus grande Puiſſance $8cy+ac$, l'on trou-

trouvera $y \gg \frac{d^4-2acdd+aacc-8aadd-8a^3c+16a^4}{32cdd}$, & au lieu de $x \gg \frac{ab}{y}$, on aura $x \gg \frac{32abdd}{d^4-2acdd+aacc-8aadd-8a^3c+16a^4}$, & la Fraction propoſée, $\frac{ax+2bc}{cx+8bc}$, ſe changera en ce quarré, $\frac{16a^4-8a^3c+aacc+8aadd-2acdd+d^4}{64a^4-32a^3c+4aacc-32aadd+8acdd+d^4}$, dont le côté eſt $\frac{4aa-ac-dd}{8aa-2ac-2dd}$.

Fraction où la lettre inconnuë a deux dimenſions.

Si la lettre inconnuë a deux dimenſions dans le Numerateur & dans le Dénominateur de la Fraction propoſée, & que dans châcun le premier terme ſoit le même, ou que l'un ſoit à l'autre dans la raiſon de deux quarrez ; on pourra rendre quarrée cette Fraction, en égalant au quarré le Numerateur & le Dénominateur par quelqu'une des methodes précedentes, comme vous allez voir dans les exemples ſuivans.

Propoſons en premier lieu cette Fraction, $\frac{xx+2ab}{xx+2ax}$, où les premiers termes dans le Numerateur & dans le Dénominateur ſont égaux entre eux. Egalez le Dénominateur $xx+2ax$ au quarré $xx-2cx+cc$, pour avoir $x \gg \frac{cc}{2a+2c}$, & au lieu du Numerateur $xx+2ab$, vous aurez celui-ci, $\frac{c^4+8abcc+16aabc+8a^3b}{4aa+8ac+4cc}$, qui étant une Fraction, dont le Dénominateur $4aa+8ac+4cc$ a déja ſa Racine quarrée $2a+2c$, il ſuffira d'égaler au quarré le Numerateur $c^4+8abcc+16aabc+8a^3b$, pour le côté duquel prenant $cc+4ab$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $c^4+8abcc+16aabc+8a^3b \gg c^4+8abcc+16aabb$, on trouvera $c \gg b-\frac{1}{2}a$, & au lieu de $x \gg \frac{cc}{2a+2c}$,

$\frac{cc}{2a+2c}$, on aura $x \gtrless \frac{aa-4ab+4bb}{4a+8b}$, & au lieu de la Fraction propoſée, $\frac{xx+2ab}{xx+2ax}$, on aura ce quarré $\frac{a^4+24a^3b+152aabb+96ab^3+16b^4}{9a^4-24a^3b-8aabb+32ab^3+16b^4}$, dont le côté eſt $\frac{aa+12ab+4bb}{3aa...4ab...4bb}$.

Si vous voulez vous ſervir de la methode de Diophante, vous aurez ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$xx+2ab.$$
$$xx+2ax.$$

Leur difference eſt $2ab-2ax$, dont les deux nombres produiſans ſont a, $2b-2x$. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{1}{2}a+b-x$, dont le quarré $\frac{1}{4}aa+ab+bb-ax-2bx+xx$ étant égalé à la plus grande Puiſſance $xx+2ab$, on trouvera $x \gtrless \frac{aa-4ab+4bb}{4a+8b}$, comme auparavant.

Ou bien pour rendre quarrée la Fraction propoſée $\frac{xx+2ab}{xx+2ax}$, égalez le Numerateur au Dénominateur, par cette Equation, $xx+2ab \gtrless xx+2ax$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless b$, & la Fraction propoſée $\frac{xx+2ab}{xx+2ax}$, ſe trouvera égale à l'unité, qui eſt un nombre quarré.

Cette ſolution eſt bien particuliere, & pour en avoir une autre; Multipliez le Numerateur $xx+2ab$ par le Dénominateur $xx+2ax$, pour avoir leur produit $x^4+2ax^3+2abxx+4aabx$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $xx+ax$, on trouvera $x \gtrless \frac{4ab}{a-2b}$, & la Fraction propoſée $\frac{xx+2ab}{xx+2ax}$, ſe

chan-

changera en ce quarré, $\frac{aa+4ab+4bb}{4aa}$, dont le côté eſt $\frac{a+2b}{2a}$.

Ou bien encore égalez le Dénominateur $xx+2ax$ au quarré $\frac{ccxx}{dd}$, dont le côté eſt $\frac{cx}{d}$, pour avoir $x \propto \frac{2add}{cc-dd}$: & le Numerateur $xx+2ab$, au quarré $mm-2mx+xx$, dont le côté eſt $m \ldots x$, pour avoir le même $x \propto \frac{mm-2ab}{2m}$, & par conſéquent cette Equation, $\frac{2add}{cc-dd} \propto \frac{mm-2ab}{2m}$, dans laquelle on trouvera $\frac{c}{d} \propto \sqrt{\frac{mm-2ab}{mm+4am-2ab}}$. Ainſi on aura cette Fraction à égaler au quarré, $\frac{mm+4am-2ab}{mm-2ab}$; Multipliez le Numerateur par le Dénominateur, pour avoir en entiers cette Puiſſance à égaler au quarré, $m^4+4am^3-4abmm-8aabm+4aabb$, pour le côté duquel prenant $2ab-2am+mm$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $m^4+4am^3-4abmm-8aabm+4aabb \propto 4aabb-8aabm+4aamm+4abmm-4am^3+m^4$, l'on trouvera $m \propto \frac{3}{2}a+b$, & par conſéquent $c \propto \frac{3ad+2bd}{a-2b}$, ou bien en entiers on aura $c \propto 3a+2b$, & $d \propto aa-2b$, & au lieu de $x \propto \frac{2add}{cc-dd}$, ou de $x \propto \frac{mm-2ab}{2m}$, on aura $x \propto \frac{aa-4ab+4bb}{4a+8b}$, comme auparavant.

Propoſons maintenant cette Fraction, $\frac{4xx+2ab}{9xx+2ax}$, où le premier terme $4xx$ du Numerateur eſt au premier $9xx$ du Dénominateur, comme le quarré 4 au quarré 9; Il la faut reduire en une autre, où le premier terme

me ſoit le même dans le Numerateur & dans le Dénominateur, après quoi on la pourra rendre quarrée par quelqu'une des methodes précedentes. Mais pour faire cette reduction, multipliez le Numerateur $4xx+2ab$ par le nombre quarré 9, qui ſe rencontre dans le premier terme du Dénominateur : & reciproquement le Dénominateur $9xx+2ax$ par le nombre quarré 4, qui ſe trouve dans le premier terme du Numerateur, & vous aurez cette autre Fraction à égaler au quarré, $\frac{36xx+18ab}{36xx+8ax}$.

Si on égale le Numerateur $36xx+18ab$ au Dénominateur $36xx+8ax$, on trouvera $x \gtrdot \frac{9b}{7}$, & la Fraction précedente $\frac{36xx+18ab}{36xx+8ax}$ ſe changera en ce quarré 1, dont le côté eſt 1 : ou la Fraction propoſée $\frac{4xx+2ab}{9xx+2ax}$, en celle-ci, $\frac{324bb+32ab}{729bb+72ab}$, laquelle étant reduite à moindres termes donne ce quarré $\frac{4}{9}$, dont le côté eſt $\frac{2}{3}$.

Si vous voulez vous ſervir de la methode de Diophante, vous aurez ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$36xx+18ab.$$
$$36xx+8ax.$$

Leur difference eſt $18ab-8ax$, dont les deux nombres produiſans ſont $\frac{3}{7}a$, $27b-12x$. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{3a}{7}+\frac{27b}{2}-6x$, dont le quarré $\frac{aa}{9}+9ab+\frac{729bb}{4}-4ax-162bx+36xx$ étant égalé à la plus grande Puiſſance $36xx+18ab$, on trouvera $x \gtrdot \frac{4aa}{144a+5832b}\frac{324ab+6561bb}{}$, &c.

Si $a \gtrdot \frac{1}{1}$, & $b \gtrdot \frac{1}{9}$, on trouvera $x \gtrdot \frac{4}{17}$, & la Fraction propoſée $\frac{4xx+2ab}{9xx+2ax}$, ſe changera en ce quarré, $\frac{289}{1156}$, dont le côté eſt $\frac{17}{34}$.

Ou

Ou bien ſans qu'il ſoit beſoin de reduire la Fraction propoſée $\frac{4xx+2ab}{9xx+2ax}$, multipliez le Numerateur $4xx+2ab$ par le Dénominateur $9xx+2ax$, & égalez leur produit $36x^4+8ax^3+18abxx+4aabx$ au quarré $36x^4+8ax^3+\frac{4aaxx}{9}$, dont le côté eſt $6xx+\frac{2ax}{1}$, pour avoir $x \gtrdot \frac{18ab}{2a-81b}$, & la Fraction propoſée $\frac{4xx+2ab}{9xx+2ax}$, ſe changera en ce quarré, $\frac{4aa+3144ab+65610bb}{36aa}$, dont le côté eſt $\frac{2a+81b}{6a}$.

La même methode ſervira pour rendre quarrée une Fraction, dont le Numerateur & le Dénominateur auront deux termes connus, dans la raiſon de deux quarrez.

Comme pour égaler au quarré cette Fraction, $\frac{2xx+ab}{4xx+4ax+4ab}$, en multipliant le Numerateur $2xx+ab$ par le Denominateur $4xx+4ax+4ab$, on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $8x^4+8ax^3+12abxx+4aabx+4aabb$, pour le côté duquel prenant $2ab+ax-\frac{axx}{4b}+3xx$, on trouvera $x \gtrdot \frac{8aab+32abb}{aa-24ab+16bb}$.

Si $a \gtrdot 8$, & $b \gtrdot \frac{1}{4}$, on trouvera $x \gtrdot \frac{149}{17}$, & la Fraction propoſée $\frac{2xx+ab}{4xx+4ax+4ab}$ ſe changera en ce quarré $\frac{21025}{11756}$, dont le côté eſt $\frac{145}{136}$.

Fraction où la lettre inconnuë a trois dimenſions.

La même methode pourra auſſi ſervir, lorſque la lettre inconnuë aura une dimenſion dans le Numerateur & trois dans le Dénominateur de la Fraction propoſée, ou une dans le Dénominateur & trois dans le Numerateur, & que le premier terme du Numerateur ſera au premier du Dénominateur dans la raiſon de deux quarrez.

Comme

Comme pour égaler au quarré cette Fraction, $\frac{x+2a}{x^3+3bbx}$, multipliez le Numerateur $x+2a$ par le Dénominateur x^3+3bbx, & vous aurez ce produit à égaler au quarré, $x^4+2ax^3+3bbxx+6abbx$, pour le côté duquel prenant $xx+ax$, on trouvera $x \gg \frac{6abb}{aa-3bb}$.

Si $a \gg 2$, & $b \gg 1$, on trouvera $x \gg 12$, & la Fraction proposée $\frac{x+2a}{x^3+3bbx}$ se changera en ce quarré $\frac{4}{441}$, dont le côté est $\frac{2}{21}$.

Ou bien lorsque le terme connu du Numerateur sera au terme connu du Dénominateur, comme quarré à quarré, parce que le produit de ces deux termes connus, qui sont toûjours supposez de même affection, sera quarré, & servira par conséquent à égaler au quarré le produit du Numerateur & du Dénominateur.

Comme pour égaler au quarré cette Fraction, $\frac{5x-2a}{x^3-2axx+3aax-2a^3}$, en multipliant le Numerateur $5x-2a$ par le Dénominateur $x^3-2axx+3aax-2a^3$, on aura cette Puissance à égaler au quarré, $4a^4-16a^3x+19aaxx-12ax^3+5x^4$, pour le côté duquel prenant $2aa-4ax+\frac{3xx}{2}$, on trouvera $x \gg \frac{96a}{71}$, & la Fraction proposée $\frac{5x-2a}{x^3-2axx+3aax-2a^3}$, se changera en ce quarré $\frac{81929184a}{17960225}$, dont le côté est $\frac{9034a}{3795}$.

Fraction où il y a plusieurs lettres inconnuës.

Si dans la Fraction proposée il y a plusieurs lettres inconnuës, ou indéterminées, on la pourra très-commodément égaler au quarré en la reduisant en une autre qui ait moins de termes, ce qui se fera par la regle de trois en cette sorte.

Pro-

Propoſons cette Fraction, $\frac{axxy+2axyy}{3bx+4bz}$. Faites que les deux termes du Numerateur ſoient proportionnels aux deux termes du Dénominateur, par cette analogie, $axxy, 2axyy :: 3bx, 4bz$, ou $x, 2y :: 3x, 4z$, ou $1, y :: 3, 2z$, d'où l'on tire cette Equation $2z \propto 3y$, dans laquelle on trouvera en entiers $y \propto 2$, & $z \propto 3$, & au lieu de la Fraction propoſée $\frac{axxy+2axyy}{3bx+4bz}$, vous aurez celle-ci, $\frac{2axx+8ax}{3bx+12ab}$, ou $\frac{2ax}{3b}$, que l'on peut rendre quarrée en une infinité de manieres, parce que la lettre inconnuë n'y a qu'une dimenſion. Si donc on l'égale au quarré indéterminé cc, on trouvera $x \propto \frac{3bcc}{2a} - 1$ & à cauſe de $y \propto 2$, & de $z \propto 3$, la Fraction propoſée $\frac{axxy+2axyy}{3bx+4bz}$ ſe changera en ce quarré cc, dont le côté eſt c.

Parce que la lettre inconnuë z n'a qu'une dimenſion dans la Fraction propoſée, l'on aura une ſolution plus générale, en égalant tout d'un coup la Fraction propoſée $\frac{axxy+2axyy}{3bx+4bz}$, au quarré indéterminé cc, & alors vous trouverez $z \propto \frac{axxy+2axyy-4bccx}{4bcc}$, & la Fraction propoſée $\frac{axxy+2axyy}{3bx+4bz}$, ſe changera en ce quarré cc, dont le côté eſt c.

On voit évidemment que la Fraction propoſée $\frac{axxy+2axyy}{3bx+4bz}$ ſe pourroit abaiſſer, en diviſant le Numerateur & le Dénominateur par x, ſi cette lettre x ſe rencontroit dans le terme $4bz$, parce qu'ainſi elle ſe rencon-

rencontreroit dans tous les termes: & afin que cela arrive, ſuppoſons $z \propto \frac{cx}{d}$, & mettant $\frac{cx}{d}$ à la place de z, la Fraction propoſée $\frac{axxy+2axyy}{3bx+4bz}$, ſe changera en celle-ci, $\frac{axxy+2axyy}{3bx+\frac{4bcx}{d}}$, ou $\frac{adxy+2adyy}{3bd+4bc}$, où la lettre inconnuë x n'a qu'une dimenſion, ce qui fait qu'on la peut égaler à tel quarré indéterminé que l'on voudra, où la lettre inconnuë x ne ſe rencontre pas, comme au quarré mm, & alors on trouvera $x \propto \frac{3bdmm+4bcmm-2adyy}{adxy}$, & au lieu de $z \propto \frac{cx}{d}$, on aura $z \propto \frac{3bcdmm+4bccmm-2acdyy}{addy}$, & la Fraction propoſée $\frac{adxy+2adyy}{3bd+4bz}$, ſe changera en ce quarré mm, dont le côté eſt m.

Parce que dans la Fraction reduite $\frac{adxy+2adyy}{3ba+4bc}$, la lettre inconnuë y, ſe rencontre dans tout le Numerateur $adxy+2adyy$, & qu'elle n'y a pas plus de deux dimenſions; on pourra égaler cette Fraction à un quarré indéterminé, où le quarré de la même lettre inconnuë y, ſe rencontre, comme au quarré $\frac{mmyy}{nn}$, & alors on trouvera en entiers $x \propto 3bdmm+4bcmm-2adnn$, & $y \propto adnn$, & la Fraction propoſée $\frac{adxxy+2adxyy}{3bx+4bz}$, ſe changera en ce quarré $aaddmmnn$, dont le côté eſt $admn$.

Parce que la lettre indéterminée y ſe rencontre dans tous les termes du Numerateur $axxy+2axyy$ de la Fraction propoſée $\frac{axxy+2axyy}{3bx+4bz}$, on voit que cette Fraction

ſe

ſe pourroit abaiſſer, en la diviſant par y; ſi la même lettre y ſe rencontroit dans tous les termes du Dénominateur $3bx+4bz$: c'eſt pourquoi afin que cela arrive, il faut égaler ce Dénominateur $3bx+4bz$ à un Plan, où cette lettre y ſe rencontre, comme au Plan ay, prenant plûtôt le Plan ay que le Plan by, cy, &c. parce que la lettre a ſe rencontrant dans le Numerateur $axxy+2axyy$, la Fraction ſe pourra encore abaiſſer en la diviſant par a. Si donc on ſuppoſe $3bx+4bz \propto ay$, on trouvera $z \propto \frac{ay-3bx}{4b}$, & ſi à la place de z, on met ſa valeur trouvée $\frac{ay-3bx}{4b}$, la Fraction propoſée $\frac{axxy-2axyy}{3bx+4bz}$ ſe reduira à celle-ci, $\frac{axxy+2axyy}{ay}$, ou à cet entier $xx+2xy$, lequel étant égalé au quarré indéterminé $\frac{ccxx}{dd}$, dont le côté eſt $\frac{cx}{d}$, on trouvera en entiers, $x \propto 2dd$, & $y \propto cc-dd$, & au lieu de $z \propto \frac{ay-3bx}{4b}$, on aura $z \propto \frac{acc-add-6bdd}{4b}$, & la Fraction propoſée $\frac{axxy+2axyy}{3bx+4bz}$ ſe changera en ce quarré $4ccdd$, dont le côté eſt $2cd$.

Pour rendre quarrée cette Fraction, $\frac{abxx-bbxy+aayy}{aaxx+abbx}$, l'on conſidérera que ſon Dénominateur $aaxx+abbx$ ſe peut diviſer par ax, & que par conſéquent la Fraction ſe pourroit abaiſſer, ſi ſon Numerateur $abxx-bbxy+aayy$ ſe pouvoit diviſer auſſi par ax: & comme il n'y a que le premier terme $abxx$, qui ſoit diviſible par ax, il faut faire évanouïr les deux autres $bbxy$, $aayy$, qui ſont de contraire affection, par cette Equation, $aayy-bbxy \propto o$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{bbx}{aa}$, & au lieu de la Fraction propoſée $\frac{abxx-bbxy+aayy}{aaxx+abbx}$, on aura celle-

ci, $\frac{abxx}{aaxx+abbx}$, ou $\frac{bx}{ax+bb}$, laquelle étant égalée au quarré indéterminé $\frac{cc}{dd}$, dont le côté eſt $\frac{c}{d}$, on aura $x \propto \frac{bbcc}{bdd-acc}$, c'eſt pourquoi au lieu de $y \propto \frac{bbx}{aa}$, on aura $y \propto \frac{b^4cc}{a^3bdd-a^3cc}$, & la Fraction propoſée $\frac{abxx-bbxy+aayy}{aaxx+abbx}$ ſe changera en ce quarré $\frac{cc}{dd}$, dont le côté eſt $\frac{c}{d}$.

Ou bien, afin que la Fraction propoſée $\frac{abxx-bbxy+aayy}{aaxx+abbx}$, ſe puiſſe abaiſſer en la diviſant par x, ſuppoſez $y \propto x$, pour avoir cette autre Fraction, $\frac{abxx-bbxx+aaxx}{aaxx+abbx}$, ou $\frac{abx-bbx+aax}{aax+abb}$, laquelle étant égalée au quarré indéterminé $\frac{cc}{dd}$, on trouvera x, ou $y \propto \frac{abbcc}{abdd-bbdd+aadd-aacc}$, & la Fraction propoſée $\frac{abxx-bbxy+aayy}{aaxx+abbx}$, ſe changera en ce quarré $\frac{cc}{dd}$, dont le côté eſt $\frac{c}{d}$.

Ou bien encore ſans abaiſſer la Fraction propoſée, $\frac{abxx-bbxy+aayy}{aaxx+abbx}$, égalez le Numerateur $abxx-bbxy+aayy$ au quarré $aayy$, pour avoir $y \propto \frac{ax}{b}$, & le Dénominateur $aaxx+abbx$ au quarré $ccxx$, pour avoir $x \propto \frac{abb}{cc-aa}$, & par conſéquent $y \propto \frac{aab}{cc-aa}$, & la Fraction propoſée $\frac{abxx-bbxy+aayy}{aaxx+abbx}$, ſe changera en ce quarré $\frac{a^4}{bbcc}$, dont le côté eſt $\frac{aa}{bc}$.

Pour

Pour avoir une ſolution plus générale, égalez le Numerateur $abxx-bbxy+aayy$ au quarré $aayy+2acxy+ccxx$, dont le côté eſt $ay+cx$, pour avoir $y \mathrel{\text{ø}} \frac{abx-ccx}{bb+2ac}$; & le Dénominateur $aaxx+abbx$ au quarré $aaxx-2abdx+bbdd$, dont le côté eſt $ax \ldots bd$, pour avoir $x \mathrel{\text{ø}} \frac{bdd}{ab+2ad}$; & par conſéquent $y \mathrel{\text{ø}} \frac{abbdd-bccdd}{ab^3+2aabbd+2aabc+aacd}$.

Si $a \mathrel{\text{ø}} 1$, & $b \mathrel{\text{ø}} 2$, & qu'on ſuppoſe $c \mathrel{\text{ø}} 1$, & $d \mathrel{\text{ø}} 2$, on trouvera $x \mathrel{\text{ø}} \frac{4}{7}$, & $y \mathrel{\text{ø}} \frac{3}{8}$, & la Puiſſance propoſée $\frac{abxx-bbxy+aayy}{aaxx+abbx}$, ſe changera en ce quarré $\frac{49}{144}$, dont le côté eſt $\frac{7}{12}$.

On peut encore autrement égaler au quarré la Puiſſance propoſée $\frac{abxx-bbxy+aayy}{aaxx+abbx}$, ſçavoir en la reduiſant à une autre, qui ait deux nombres produiſans homogénes entre eux, pour les pouvoir égaler enſemble, ce qui rendra quarrée la Fraction propoſée, comme vous allez voir.

Parce que le Dénominateur $aaxx+abbx$ ſe peut diviſer par ax, & que le Numerateur $abxx-bbxy+aayy$ ſe pourroit diviſer par bx, ſans le terme $aayy$, faites que ce terme $aayy$ qui eſt quarré, ſoit diviſible par bx, en l'égalant au quarré de bx, ſçavoir au quarré $bbxx$, par cette Equation, $aayy \mathrel{\text{ø}} bbxx$, dans laquelle vous trouverez $y \mathrel{\text{ø}} \frac{bx}{a}$, & la Fraction propoſée $\frac{abxx-bbxy+aayy}{aaxx+abbx}$ ſe changera en celle-ci, $\frac{aabx-b^3x+abbx}{a^3x+aabb}$, qui a ces deux nombres produiſans $\frac{b}{a}$, $\frac{aax-bbx+abx}{aax+abb}$, leſquels étant égalez entre eux, on trouvera $x \mathrel{\text{ø}} \frac{b^3}{aa-bb}$, & par conſéquent

ſéquent $y \propto \frac{b^4}{a^3-abb}$, & la Fraction propoſée $\frac{abxx-bbxy+aayy}{aaxx+abbx}$, ſe changera en celle-ci, $\frac{a^3b^7-ab^9+aab^8}{a^5b^5-a^3b^7+a^4b^6}$, ou $\frac{bb}{aa}$, dont la Racine quarrée eſt $\frac{b}{a}$.

Ou bien faites évanouïr les deux termes $aayy$, $bbxy$, qui ſont de contraire affection, par cette Equation, $aayy-bbxy \propto o$, dans laquelle vous trouverez $y \propto \frac{bbx}{aa}$, & la puiſſance propoſée $\frac{abxx-bbxy+aayy}{aaxx+abbx}$, ſe reduira à celle-ci, $\frac{abx}{aax+abb}$, qui a ces deux nombres produiſans $\frac{b}{a}$, $\frac{ax}{ax+bb}$, leſquels étant égalez entre eux, on trouvera $x \propto \frac{b^3}{aa-ab}$, & au lieu de $y \propto \frac{bbx}{aa}$, l'on aura $y \propto \frac{b^5}{a^4-a^3b}$, & au lieu de la Fraction propoſée $\frac{abxx-bbxy+aayy}{aaxx+abbx}$, l'on aura celle-ci, $\frac{ab^7}{a^3b^5}$, ou $\frac{bb}{aa}$, dont la Racine quarrée eſt $\frac{b}{a}$, comme auparavant, quoique les valeurs de x & de y ne ſoient pas les mêmes qu'auparavant.

Pour rendre quarrée cette Fraction, $\frac{y^3-x^3}{\omega^4x-z^4y}$, multipliez le Numerateur y^3-x^3 par le Dénominateur ω^4x-z^4y, pour avoir en entiers, cette puiſſance à égaler au quarré, $\omega^4xy^3-\omega^4x^4-z^4y^4+z^4x^3y$. Pour cette fin, l'on en diminuera le nombre des termes, en égalant enſemble les deux moyens, par cette Equation, $\omega^4x^4 \propto z^4y^4$, dans laquelle on trouvera en entiers $x \propto z$, & $y \propto \omega$, & la puiſſance précedente $\omega^4xy^3-\omega^4x^4-z^4y^4+z^4x^3y$, ſe reduira à celle-ci, $\omega^7z-2\omega^4z^4+\omega z^7$

ωz^7, laquelle étant diviſée par le quarré $\omega^6 - 2\omega^3 z^3 + z^6$, dont le côté eſt $\omega^3 \ldots z^3$, on aura en moindres termes cette autre puiſſance à égaler au quarré ωz, pour le côté duquel prenant $\frac{a\omega}{b}$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $\omega z \propto \frac{aa\omega\omega}{bb}$, on trouvera en entiers $\omega \propto bb$, $z \propto aa$, & par conſéquent $x \propto aa$, & $y \propto bb$, & au lieu de la Fraction propoſée $\frac{y^3 - x^3}{\omega^4 x - z^4 y}$, on aura ce quarré $\frac{1}{aabb}$, dont le côté eſt $\frac{1}{ab}$.

Ou bien plus facilement, reduiſez la fraction propoſée $\frac{y^3 - x^3}{\omega^4 x - z^4 y}$ à moins de termes, par cette analogie, $\omega^4 x, z^4 y :: y^3, x^3$, d'où l'on tire cette Equation, $\omega^4 x^4 \propto z^4 y^4$, dans laquelle on trouvera comme auparavant, $x \propto z$, & $y \propto \omega$, & la Fraction propoſée $\frac{y^3 - x^3}{\omega^4 x - z^4 y}$, ſe reduira à celle-ci, $\frac{\omega^3 - z^3}{z\omega^4 - z^4\omega}$ ou $\frac{1}{z\omega}$, dont le Numerateur 1 étant déja quarré, il ſuffira d'égaler au quarré le Dénominateur $z\omega$, comme il a déja été fait.

Ou bien parce que le Numerateur $y^3 - x^3$ n'eſt pas homogéne au Dénominateur $\omega^4 x - z^4 y$, multipliez ce Numerateur $y^3 - x^3$ par le quarré aa, & égalez le produit $aay^3 - aax^3$ au Dénominateur $\omega^4 x - z^4 y$, par cette Equation, $aay^3 - aax^3 \propto \omega^4 x - z^4 y$, que vous reduirez en ces deux autres,

$$aay^3 \propto \omega^4 x.$$
$$aax^3 \propto z^4 y.$$

Dans la premiere $aay^3 \propto \omega^4 x$, on trouvera $x \propto \frac{aay^3}{\omega^4}$, & par conſéquent $x^3 \propto \frac{a^6 y^9}{\omega^{12}}$, & la deuxiéme $aax^3 \propto z^4 y$, ſe changera en celle-ci, $\frac{a^8 y^9}{\omega^{12}} \propto z^4 y$, dans laquelle on

trouvera $z \propto \frac{aayy}{\omega^3}$, & la Puiſſance propoſée $\frac{y^3 - x^3}{\omega^4 x - x^4 y}$, ſe changera en ce quarré $\frac{1}{aa}$, dont le côté eſt $\frac{1}{a}$.

PROBLEME VIII.

Egaler au Cube une Puiſſance, où la lettre inconnuë a une dimenſion.

UNe Puiſſance où la lettre inconnuë n'a qu'une dimenſion, ſe peut généralement rendre cubique, en l'égalant à tel Cube indéterminé que l'on voudra, parce que la valeur de la lettre inconnuë ſe trouvera toûjours rationnelle.

Ainſi pour rendre cubique cette Puiſſance $aax - bbx$, on l'égalera au Cube indéterminé c^3, par cette Equation, $aax - bbx \propto c^3$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{c^3}{aa - bb}$, & la Puiſſance propoſée $aax - bbx$ ſe changera en ce Cube c^3, dont le côté eſt c.

Pareillement pour rendre cubique cette Puiſſance $aax - abb$, on l'égalera au Cube indéterminé d^3, par cette Equation, $aax - abb \propto d^3$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{d^3 + abb}{aa}$, & la Puiſſance propoſée $aax - abb$, ſe changera en ce Cube d^3, dont le côté eſt d.

Parce que la Puiſſance propoſée $aax - abb$, a ces deux nombres produiſans a, $ax - bb$, on la pourra rendre cubique en égalant le ſecond nombre produiſant qui eſt plus élevé, au quarré du premier qui eſt plus bas, par cette Equation, $ax - bb \propto aa$, dans laquelle on trouvera $x \propto a + \frac{bb}{a}$, & la Puiſſance propoſée $aax - bbx$, ſe changera en ce Cube a^3, dont le côté eſt a.

Pareillement parce que les deux nombres produiſans

ſans de la premiere Puiſſance $aax-bbx$, ſont $a+b$, $ax-bx$, on égalera le ſecond au quarré du premier, par cette Equation, $ax-bx \propto aa+2ab+bb$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{aa+2ab+bb}{a-b}$, & la Puiſſance propoſée $aax-bbx$, ſe changera en ce Cube, $a^3+3aab+3abb+b^3$, dont le côté eſt $a+b$.

Ou bien parce que les deux nombres produiſans de la même Puiſſance $aax-bbx$, ſont $a-b$, $ax+bx$, on égalera le deuxiéme au quarré du premier, par cette Equation, $ax+bx \propto aa-2ab+bb$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{aa-2ab+bb}{a+b}$, & la Puiſſance propoſée $aax-bbx$, ſe changera en ce Cube $a^3-3aab+3abb-b^3$, dont le côté eſt $a-b$.

Ou bien encore parce que la Puiſſance propoſée $aax-bbx$, a ces trois nombres produiſans, $a+b$, $a-b$, x, on les rendra proportionnels, en égalant le produit des deux extrêmes au quarré du moyen, par cette Equation, $ax+bx \propto aa-2ab+bb$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{aa-2ab+bb}{a+b}$, comme auparavant.

PROBLEME IX.

Egaler au Cube une Puiſſance, où la lettre inconnuë a deux dimenſions.

Puiſſance avec un ſeul terme.

PRemierement ſi la Puiſſance propoſée n'a qu'un terme, on la rendra cubique en l'égalant à un Cube, dont le côté ſoit égal à la lettre inconnuë priſe autant de fois que l'on voudra.

Ainſi pour rendre cubique cette Puiſſance axx, on l'égalera au Cube $\frac{c3x3}{d3}$, dont le côté eſt $\frac{cx}{d}$, par cette

Equation, $axx \propto \frac{c^3 x^3}{d^3}$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{ad^3}{c^3}$, & la puiſſance propoſée axx ſe changera en ce Cube $\frac{a^3d^6}{c^6}$, dont le côté eſt $\frac{add}{cc}$.

Puiſſance avec tous ſes termes.

Si la puiſſance propoſée a tous ſes termes, on la pourra rendre cubique lorſque le dernier terme ſera un Cube, parce qu'on la pourra égaler à ce Cube, ou à un autre Cube, dont le côté ſoit égal à la plus proche Racine cubique de la même puiſſance.

Ainſi pour rendre cubique cette puiſſance, $axx - 3abx + a^3$, qui a tous ſes termes, & dont le dernier a^3 eſt un Cube, on l'égalera à ce Cube par cette Equation, $axx - 3abx + a^3 \propto a^3$, dans laquelle on trouvera $x \propto 3b$, & la puiſſance propoſée $axx - 3abx + a^3$, ſe changera en ce Cube a^3, dont le côté eſt a.

Ou bien on prendra la plus proche Racine cubique de la puiſſance propoſée $axx - 3abx + a^3$, & l'on aura $a - \frac{bx}{a}$, pour le côté du Cube qu'on doit égaler à la même puiſſance, lequel par conſéquent ſera $a^3 - 3abx + \frac{3bbxx}{a} - \frac{b^3x^3}{a^3}$, de ſorte qu'on aura cette Equation, $axx - 3abx + a^3 \propto a^3 - 3abx + \frac{3bbxx}{a} - \frac{b^3x^3}{a^3}$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{3aabb - a^4}{b^3}a$, & la puiſſance propoſée $axx - 3abx + a^3$, ſe changera en ce Cube $\frac{a^9 - 6a^7b^2 + 12a^5b^4 - 8a^3b^6}{b^9}$, dont le côté eſt $\frac{a^3 - 2abb}{b^3}$.

Puiſſance où le dernier terme manque.

Si la puiſſance propoſée n'a point de dernier terme, en ſorte que la lettre inconnuë ſoit dans chacun de ſes

ſes deux termes; on la pourra égaler au Cube, pourvû que la ſomme des unitez ſoit un Cube, & qu'il n'y ait qu'une même lettre connuë, par une methode ſemblable à celle qui a été enſeignée dans les Problêmes précedens, comme vous allez voir.

Pour égaler au cube cette puiſſance $10axx-2aax$, où la ſomme 8 des unitez a ſa Racine cubique 2, ſuppoſez $x \propto y+a$, & vous aurez cette autre puiſſance à égaler au Cube, $10ayy+18aay+8a^3$, pour le côté duquel prenant $2a+\frac{27}{2}$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $10ayy+18aay+8a^3 \propto 8a^3+18aay+\frac{27yy}{2}+\frac{27y^3}{8}$, on trouvera $y \propto \frac{216}{217}$, & par conſéquent $x \propto -\frac{14}{217}$, & la puiſſance propoſée $10axx-2aax$, ſe changera en ce Cube, $\frac{64a^3}{729}$, dont le côté eſt $\frac{4a}{9}$.

Pareillement pour égaler au Cube cette puiſſance $4axx-12aax$, où la ſomme des unitez fait le nombre cubique -8, dont le côté eſt -2, ſuppoſez $x \propto y+a$, & vous aurez cette autre puiſſance à égaler au Cube, $4ayy-4aay-8a^3$, pour le côté duquel prenant $-2a$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $4ayy-4aay-8a^3 \propto -8a^3$, l'on trouvera $y \propto a$, & par conſéquent $x \propto 2a$, & la puiſſance propoſée $4axx-12aax$, ſe changera en ce Cube, $-8a^3$, dont le cube eſt $-2a$.

Au lieu de prendre $-2a$, pour le côté du Cube qu'il faut égaler à la puiſſance précedente $4ayy-4aay-8a^3$, on peut prendre $-2a-\frac{1}{7}y$, & alors on aura cette Equation, $4ayy-4aay-8a^3 \propto -8a^3-4aay-\frac{1}{7}ayy-\frac{1}{343}y^3$, dans laquelle on trouvera $y \propto -126a$: c'eſt pourquoi au lieu de $x \propto y+a$, on aura $x \propto -125a$, & au lieu de la puiſſance propoſée $4axx-12aax$, on aura ce Cube $640000a^3$, dont le côté eſt $40a$.

Puiſſance où le ſecond terme manque.

C'eſt de la même façon que l'on rendra cubique cette

cette puiſſance $3axx+5a^3$, qui n'a point de ſecond terme, & où la ſomme 8 des unitez a ſa Racine cubique 2 : ſçavoir en ſuppoſant $x \propto y+a$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au cube, $3ayy+6aay+8a^3$, pour le côté duquel prenant $2a+\frac{1}{3}y$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $3ayy+6aay+8a^3 \propto 8a^3+6aay+\frac{1}{3}ayy+\frac{1}{27}y^3$, l'on trouvera $y \propto 12a$, & par conſéquent $x \propto 13a$, & la Puiſſance propoſée $3axx+5a^3$ ſe changera en ce cube $512a^3$, dont le côté eſt $8a$.

On pourra égaler infiniment au cube une ſemblable Puiſſance, quand elle aura tous ſes termes, & qu'elle aura une Racine quarrée, ſçavoir en égalant à un cube indéterminé cette Racine quarrée, comme vous allez voir.

Pour égaler au cube cette Puiſſance, $aabbxx+2aab^3x+aab^4$, dont la Racine quarrée eſt $abx+abb$, égalez cette Racine quarrée $abx+abb$ au cube indéterminé c^3, par cette Equation, $abx+abb \propto c^3$, dans laquelle vous trouverez $x \propto \frac{c^3-abb}{ab}$, & la Puiſſance propoſée $aabbxx+2aab^3x+aab^4$, ſe changera en ce cube c^6, dont le côté eſt cc.

On ſe ſervira de la même methode pour égaler au cube une Puiſſance qui n'aura que le premier terme, pourvû que ce premier terme ſoit quarré, quoi qu'on la puiſſe auſſi égaler à un cube indéterminé, où celui de la lettre inconnuë ſe rencontre, comme nous avons déja dit.

Ainſi pour égaler au cube cette Puiſſance $aabbxx$, dont la Racine quarrée eſt abx, égalez cette Racine quarrée abx au cube c^3, par cette Equation, $abx \propto c^3$, dans laquelle vous trouverez $x \propto \frac{c^3}{ab}$, & la Puiſſance propoſée $aabbxx$ ſe changera en ce cube c^6, dont le côté eſt cc.

On

On pourroit auſſi, comme nous avons déja dit ailleurs, égaler la Puiſſance propoſée $aabbxx$ au cube c^3x^3, dont le côté eſt cx, & alors on trouveroit $x \mathrel{)\!(} \frac{aabb}{c^3}$, & la Puiſſance propoſée $aabbxx$ ſe changeroit en ce cube $\frac{a^6b^6}{c^6}$, dont le côté eſt $\frac{aabb}{cc}$, qui a auſſi ſa Racine quarrée $\frac{ab}{c}$.

Solution en entiers.

Ou bien parce que la Puiſſance propoſée $aabbxx$ eſt un quarré, on la pourra égaler au quarré du cube c^6, dont le côté eſt c, & alors on trouvera $x \mathrel{)\!(} \frac{c^3}{ab}$, comme auparavant : & ſi vous voulez avoir une ſolution en entiers, mettez à la place du cube indéterminé c^3, le cube a^3b^3 du Dénominateur ab, & au lieu de $x \mathrel{)\!(} \frac{c^3}{ab}$, vous aurez $x \mathrel{)\!(} aabb$, & la Puiſſance propoſée $aabbxx$ ſe changera en ce cube a^6b^6, dont le côté eſt $aabb$, qui a auſſi ſa Racine quarrée ab.

Puiſſance où il y a plus d'une lettre inconnuë.

Si la Puiſſance propoſée n'a pas une Racine quarrée, on la reduira en une autre de cette qualité, ce qui ſera facile, lorſqu'outre la lettre inconnuë, il y aura quelqu'autre lettre inconnuë d'une ſeule dimenſion, comme vous allez voir.

Pour égaler au cube cette Puiſſance, $aabbxx + 2aabbxy$, égalez-la auparavant au quarré $ccddxx$, dont le côté eſt cdx, par cette Equation, $aabbxx + 2aabbxy \mathrel{)\!(} ccddxx$, dans laquelle on trouvera en entiers $x \mathrel{)\!(} 2aabb$, & $y \mathrel{)\!(} ccdd - aabb$, & au lieu du côté précedent cdx, on aura celui-ci, $2aabbcd$, lequel étant egalé au cube indeterminé m^3z^3, dont le côté eſt mx, on trouvera $d \mathrel{)\!(} \frac{m^3z^3}{2aabbc}$, & par conſéquent $y \mathrel{)\!(} \frac{m^6z^6 - 4a^6b^6}{4a^4b^4}$.

Si

Si $a \propto 1$, $b \propto 2$, & $c \propto 1$, & qu'on ſuppoſe $m \propto 2$, & $z \propto 3$, on trouvera $d \propto 27$, $x \propto 8$, & $y \propto 725$, & la Puiſſance propoſée $aabbxx+2aabbxy$, ſe changera en ce cube, 46656, dont le côté eſt 36, qui a encore ſa Racine quarrée 6.

PROBLEME X.

Egaler au cube une Puiſſance, où la lettre inconnuë a trois dimenſions.

Puiſſance où le troiſiéme & le quatriéme terme manque.

SI dans la Puiſſance propoſée le troiſiéme & le quatriéme terme manque, on la pourra rendre cubique, en l'égalant à un cube, dont le côté ſoit égal à la lettre inconnuë priſe autant de fois que l'on voudra.

Ainſi pour rendre cubique cette Puiſſance $aabx^3+a^4xx$, où le troiſiéme & le quatriéme terme manque, on l'égalera au cube c^3x^3, dont le côté eſt cx, par cette Equation, $aabx^3+a^4xx \propto c^3x^3$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{a^4}{c^3-aab}$, & la Puiſſance propoſée $aabx^3+a^4xx$, ſe changera en ce cube, $\frac{a^{12}c^3}{c^9-3aabc^6+3a^4bbc^3-a^6b^3}$, dont le côté eſt $\frac{a^4c}{c^3-aab}$.

Puiſſance où le dernier terme manque.

Si dans la Puiſſance propoſée le dernier terme manque, & que le premier ſoit un cube : on la rendra cubique, en l'égalant à un cube, dont le côté ſoit égal à la plus proche Raeine cubique de la même Puiſſance : ou bien en l'égalant ſimplement au premier terme, que l'on ſuppoſe cubique.

Comme pour égaler au cube cette Puiſſance $x^3-3axx+abx$, qui n'a point de dernier terme, & dont le

le premier x^3 eſt cubique, on prendra pour le côté de ce cube la plus proche Racine cubique de la Puiſſance, & l'on aura $x-a$, dont le cube $x^3-3axx+3aax-a^3$ étant égalé à la Puiſſance propoſée $x^3-3axx+abx$, l'on trouvera $x \propto \frac{aa}{3a-b}$, & la Puiſſance propoſée $x^3-3axx+abx$ ſe changera en ce cube, $\frac{a^3b^3-6a^4bb+12a^5b-8a^6}{27a^3-27aab-9abb-b^3}$, dont le côté eſt $\frac{ab-2aa}{3a-b}$.

Ou bien on égalera la Puiſſance propoſée $x^3-3axx+abx$, à ſon premier terme x^3, qui eſt cubique, & l'on trouvera $x \propto \frac{1}{3}b$, & la Puiſſance propoſée $x^3-3axx+abx$ ſe changera en ce cube $\frac{1}{27}b^3$, dont le côté eſt $\frac{1}{3}b$.

Puiſſance où le troiſiéme manque.

On pourra auſſi en deux ſemblables façons égaler au cube une Puiſſance, où le troiſiéme terme manque, pourvû que le premier & le dernier ſoient cubiques, ſçavoir en égalant la Puiſſance propoſée au dernier terme; ou bien en l'égalant à un autre cube, dont le côté ſoit égal à la plus proche Racine cubique de la Puiſſance propoſée, laquelle Racine on trouvera par le moyen du premier terme, qui eſt ſuppoſé cubique, car ainſi on détruira les deux premiers termes. On peut même ajoûter à ces deux methodes une troiſiéme, qui détruira le premier & le dernier terme, ſçavoir en joignant par le ſigne+ou−, leurs Racines cubiques, pour avoir le côté du cube, qu'on doit égaler à la Puiſſance propoſée.

Ainſi pour rendre cubique cette Puiſſance $b^3x^3-3aabbxx+a^3b^3$, où le troiſiéme terme manque, & dont le premier & le dernier ſont cubiques; on l'égalera au dernier terme a^3b^3, par cette Equation, $b^3x^3-3aabbxx+a^3b^3 \propto a^3b^3$, dans laquelle on trouvera

$x \propto$

$x \propto \frac{3aa}{b}$, & la Puiſſance propoſée, $b^3x^3 - 3aabbxx + a^3b^3$, ſe changera en ce cube a^3b^3, dont le côté eſt ab.

On bien on l'égalera à ce cube $b^3x^3 - 3aabbxx + 3a^4bx - a^6$, dont le côté eſt $bx - aa$, par cette Equation, $b^3x^3 - 3aabbxx + a^3b^3 \propto b^3x^3 - 3aabbxx + 3a^4bx - a^6$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{a^3 + b^3}{3ab}$, & la Puiſſance propoſée $b^3x^3 - 3aabbxx + a^3b^3$ ſe changera en un cube, dont le côté eſt $\frac{a^3 + b^3 - 3aa}{3a}$.

Ou bien encore on l'égalera au cube $b^3x^3 + 3ab^3xx + 3aab^3x + a^3b^3$, par cette Equation, $b^3x^3 - 3aabbxx + a^3b^3 \propto b^3x^3 + 3ab^3xx + 3aab^3x + a^3b^3$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{ab}{b - a}$, & la Puiſſance propoſée $b^3x^3 - 3aabbxx + a^5b^3$ ſe changera en ce cube, $\frac{8a^3b^6 - 12a^4b^5}{b^3 - 3abb} + \frac{6a^5b^4 - a6b^3}{3aab - x^3}$, dont le côté eſt $\frac{2abb - 2ab}{b - a}$.

Puiſſance où tous les termes ſont.

Si la Puiſſance propoſée a tous ſes termes, & que le premier & le dernier ſoient pareillement cubiques, on la pourra auſſi égaler au cube en trois façons, dont la premiere détruira les deux premiers termes, la ſeconde détruira les deux derniers, & la troiſiéme détruira le premier & le dernier.

Comme pour rendre cubique cette Puiſſance : $x^3 + 3axx - 6bbx + b^3$, qui a tous ſes termes, & dont le premier x^3, & le dernier b^3, ſont cubiques, on la pourra égaler au cube $x^3 + 3axx + 3aax + a^3$, dont le côté eſt $x + a$, par cette Equation, $x^3 + 3axx - 6bbx + b^3 \propto x^3 + 3axx + 3aax + a^3$, dans laquelle on trouvera

$x \propto$

$x \propto \frac{b^3 - a^3}{3aa - 6bb}$, & la Puiſſance propoſée $x^3 + 3axx - 6bbx + b^3$, ſe changera en un cube, dont le côté ſera $\frac{2a^3 - 6abb + b^3}{3aa - 6bb}$.

Ou bien on la pourra égaler au cube $x^3 + 3bxx + 3bbx + b^3$, dont le côté eſt $x + b$, par cette Equation, $x^3 + 3axx - 6bbx + b^3 \propto x^3 + 3bxx + 3bbx + b^3$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{2bb}{a - b}$, & la Puiſſance propoſée $x^3 + 3axx - 6bbx + b^3$, ſe changera en ce cube $\frac{a^3b^3 - 6aab^4 + 12ab^5 + 8b^6}{a^3 - 3aab + 3abb - b^3}$, dont le côté eſt $\frac{ab + 2bb}{a - b}$.

Ou bien encore on la pourra égaler au cube $b^3 - 6bbx + 12bxx - 8x^3$, dont le côté eſt $b - 2x$, par cette Equation, $x^3 + 3axx - 6bbx + b^3 \propto x^3 - 6bbx + 12bxx - 8x^3$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{4b - a}{3}$, & la Puiſſance propoſée $x^3 + 3axx - 6bbx + b^3$, ſe changera en ce cube, $\frac{8a^3 - 60aab + 150ab - 125b^3}{27}$, dont le côté eſt $\frac{2a - 5b}{3}$.

Si la Puiſſance propoſée n'a point de terme cubique, on la pourra reduire à une autre, dont le dernier terme ſoit un cube, lorſque la ſomme des unitez ſera un cube, & qu'il n'y aura qu'une ſeule lettre connuë.

Comme pour égaler au cube cette Puiſſance $2x^3 + 3axx + 3aax$, où la ſomme 8 des unitez a ſa Racine cubique 2, & où il n'y a que la lettre connuë a; ſuppoſez $x \propto y + a$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au cube, $2y^3 + 9ayy + 15aay + 8a^3$, pour le côté duquel prenant $2a + \frac{yy}{4}$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $2y^3 + 9ayy + 15aay + 8a^3 \propto 8a^3 + 15ayy + \frac{75ayy}{8} + \frac{125y^3}{64}$, l'on

l'on trouvera $y \propto 8a$, & par conſéquent $x \propto 9a$, & la Puiſſance propoſée $2x^3+3axx+3aax$, ſe changera en ce cube $1728a^3$, dont le côté eſt $12a$.

On peut autrement égaler au cube une Puiſſance, quand même elle n'auroit aucun terme cubique, & que la ſomme des unitez ne ſeroit pas un cube, pourvû qu'elle ait deux nombres produiſans heterogénes, ſçavoir en égalant le plus élevé au quarré du plus bas; ou bien en égalant le plus bas à la Racine quarrée du plus élevé, quand il en a une. Nous donnerons un exemple de l'un & de l'autre cas.

Pour égaler au cube cette Puiſſance $6x^3+3axx+26aax+13a^3$, qui a ces deux nombres produiſans, $2x+a$, $3xx+13aa$, égalez le ſecond $3xx+13aa$ au quarré $4xx+4ax+aa$ du premier $2x+a$, par cette Equation, $3xx+13aa \propto 4xx+4ax+aa$, dans laquelle on trouvera $x \propto 2a$, & la Puiſſance propoſée $6x^3+3axx+26aax+13a^3$, ſe changera en ce cube $125a^3$, dont le côté eſt $5a$.

Cette methode n'eſt pas générale, parce qu'il n'arrivera pas toûjours que la valeur de la lettre inconnuë ſera rationnelle: elle eſt neanmoins très-utile pour reſoudre des Problêmes très-difficiles, lorſque leur ſolution peut être rationnelle, comme vous verrez dans les Problêmes que nous ajoûterons à la fin de ce Traité des ſimples Egalitez. L'Aſymmetrie qui peut arriver dans la valeur de la lettre inconnuë ſe peut détruire, lorſque dans la Puiſſance propoſée il y a plus que d'une lettre inconnuë, comme vous allez voir.

Pour rendre cubique cette Puiſſance, $6x^3-9xxy+4axy+2bbx-3bby-6ayy$, qui a ces deux nombres produiſans, $2x-3y$, $3xx+2ay+bb$, égalez le ſecond au quarré du premier par cette Equation, $3xx+2ay+bb \propto 4xx-12xy+9yy$, dans laquelle on trouvera

$x \propto$

$x \propto 6y+\sqrt{bb+2ay+27yy}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $bb+2ay+27yy$, pour le côté duquel prenant $b \ldots \frac{cy}{d}$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $bb+2ay+27yy \propto bb-\frac{2bcy}{d}+\frac{ccyy}{dd}$, on trouvera $y \propto \frac{2ccd+2add}{cc-27dd}$, & par conſéquent $x \propto \frac{bcc+2acd+12bcd+12add+27bdd}{cc-27dd}$.

Si $a \propto 1$, & $b \propto 2$, & qu'on ſuppoſe $c \propto 6$, & $d \propto 1$, on trouvera $y \propto \frac{16}{5}$, & $x \propto \frac{98}{5}$, & la Puiſſance propoſée $6x^3-9xxy+4axy+2bbx-3bby-6ayy$, ſe changera en ce cube 4913000, dont le côté eſt 170.

Pour égaler au cube cette Puiſſance $2x^3+axx-4aax-3a^3$, dont les deux nombres produiſans ſont $2x-3a$, $xx+2ax+aa$, deſquels le ſecond $xx+2ax+aa$, a ſa Racine quarrée $x+a$, égalez cette Racine quarrée $x+a$, au premier $2x-3a$, par cette Equation, $x+a \propto 2x-3a$, dans laquelle on trouvera $x \propto 4a$, & la Puiſſance propoſée $2x^3+axx-4aax-3a^3$, ſe changera en ce cube $125a^3$, dont le côté eſt $5a$.

Si l'un des deux nombres produiſans ne peut pas être égalé à la Racine quarrée de l'autre, à cauſe de quelque abſurdité qui s'enſuivroit, on multipliera ce côté & cet autre nombre produiſant, chacun par un cube indéterminé, & l'on aura deux produits, qui étant égalez enſemble, donneront une valeur pour la lettre inconnuë, qui rendra cubique la Puiſſance propoſée.

Comme ſi l'on veut égaler au cube cette Puiſſance, $x^3+7axx+8aax+3a^3$, dont les deux nombres produiſans ſont $2x+3a$, $xx+2ax+aa$. Parce qu'on ne peut pas égaler la Racine quarrée $x+a$ du ſecond nombre produiſant $xx+2ax+aa$, au premier $2x+3a$, qui eſt eſſentiellement plus grand, on multipliera la Racine quarrée $x+a$, par le cube indéterminé b^3; &

le premier nombre produiſant $2x+3a$ par le cube indéterminé c^3, & on égalera enſemble les deux produits, par cette Equation, $b^3x+ab^3 \gtrless 2c^3x+3ac^3$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless \frac{3ac^3-ab^3}{b^3-2c^3}$, où l'on voit que b doit être entre $\sqrt[3]{3c^3}$, & $\sqrt[3]{2c^3}$.

C'eſt pourquoi ſi a vaut 1, & que l'on ſuppoſe $b \gtrless 13$, & $c \gtrless 10$, on trouvera $x \gtrless \frac{803}{197}$, & la Puiſſance propoſée $x^3+7axx+8aax+3a^3$, ſe changera en ce cube 2197000000, dont le côté eſt 1300.

On peut encore rendre cubique une ſemblable Puiſſance, lorſqu'elle aura trois nombres produiſans, dont deux ſeront dans la raiſon de deux quarrez, parce que leur produit ſera un quarré, dont le côté pourra être égalé à l'autre nombre produiſant comme vous allez voir.

Pour égaler au cube cette Puiſſance, $12a^3+20aax+4axx-4x^3$, qui a ces trois nombres produiſans, $3a-x$, $a+x$, $4a+4x$, dont les deux derniers $a+x$, $4a+4x$, ſont dans la raiſon des deux quarrez 1, 4, ce qui fait que leur produit $4aa+8ax+4xx$, a ſa Racine quarrée $2a+2x$; égalez cette Racine quarrée $2a+2x$ au premier nombre produiſant $3a-x$, par cette Equation, $2a+2x \gtrless 3a-x$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless \frac{1}{3}a$, & la Puiſſance propoſée $12a^3+20aax+4axx-4x^3$, ſe changera en ce cube $512a^3$, dont le côté eſt $8a$.

Si deux des trois nombres produiſans ne ſont pas dans la raiſon de deux quarrez, on leur donnera cette raiſon en les multipliant chacun par un quarré indéterminé, comme vous allez voir dans l'Exemple ſuivant.

Qu'il faille égaler au cube cette Puiſſance $60a^3-84aax+39axx-6x^3$, qui a ces trois nombres produiſans, $6a-3x$, $2a-x$, $5a-2x$. Si vous voulez donner

donner aux deux derniers $2a-x$, $5a-2x$, la raiſon de deux quarrez, multipliez le premier $2a\ x$ par le quarré indéterminé bb, & le ſecond $5a-2x$ par le quarré indéterminé cc, & égalez enſemble les deux produits par cette Equation, $2abb-bbx \propto 5acc-2ccx$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{2abb-5acc}{bb-cc}$, & au lieu des trois nombres produiſans $6a-3x$, $2a-x$, $5a-2x$, on aura en entiers ces trois autres, $3acc$, abb, acc, dont les deux derniers abb, acc, ſont entre eux comme les quarrez bb, cc, de ſorte que leur produit $aabbcc$ eſt un quarré, dont le quarré abc étant égalé au premier nombre produiſant $3acc$, on trouvera en entiers, $b \propto 3$, & $c \propto 1$, & par conſéquent $x \propto \frac{114}{7}$, & la Puiſſance propoſée $60a^3-84aax+39axx-6x^3$, ſe changera en ce cube, $\frac{27}{343}$, dont le côté eſt $\frac{3}{7}$.

On ne peut pas donner la raiſon de deux quarrez aux deux premiers nombres produiſans $6a-3x$, $2a-x$, parce qu'ils ſont dans la raiſon de 3 à 1, & qu'en travaillant comme auparavant, on trouveroit $x \propto 2a$, ce qui rendroit égal à 0, chacun de ces deux nombres produiſans. Ce qui manque ici ſe trouvera dans le Problême ſuivant.

PROBLEME XI.

Egaler au cube une Puiſſance, où la lettre inconnuë a plus de trois dimenſions.

ON n'a pas une regle générale pour égaler au cube une Puiſſance où la lettre inconnuë a plus de trois dimenſions, c'eſt pourquoi nous donnerons ſeulement ici des exemples de quelques unes, qu'on peut rendre cubiques.

Pour donc premierement égaler au cube cette

Puiſſance aax^4+aabx^3, diviſez-la par le cube x^3, pour avoir en moindres termes cette autre Puiſſance à égaler au cube, $aax+aab$, pour le côté duquel prenant c, en ſorte qu'on ait cette Equation, $aax+aab \propto c^3$, on trouvera $x \propto \frac{c^3-aab}{aa}$, qu'on auroit auſſi trouvée en égalant la Puiſſance propoſée aax^4+aabx^3, au cube c^3x^3, dont le côté eſt cx, & la Puiſſance propoſée aax^4+aabx^3, ſe changera en ce cube $\frac{c^{12}-3aab^9+3a^4bbc^6-a^6b^3c^3}{a^6}$, dont le côté eſt $\frac{c^4-aabc}{aa}$.

Pareillement pour rendre cubique cette Puiſſance, $2x^6+2ax^5$, on la diviſera par le cube x^3, pour avoir en moindres termes cette autre Puiſſance à égaler au cube, $2x^3+2axx$, pour le côté duquel prenant $\frac{cx}{d}$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $2x^3+2axx \propto \frac{c^3x^3}{d^3}$, on trouvera $x \propto \frac{2ad^3}{c^3-d^3}$, qu'on auroit auſſi trouvée en égalant la Puiſſance propoſée $2x^6+2ax^5$, au cube $\frac{c^3x^6}{d^3}$, dont le côté eſt $\frac{cxx}{d}$, & la Puiſſance propoſée $2x^6+2ax^5$ ſe changera en un cube, dont le côté ſera $\frac{4aacd^5}{c^6-2c^3d^3+d^6}$.

Bien qu'une Puiſſance ſe puiſſe abaiſſer en la diviſant par le cube de la lettre inconnuë, il n'eſt pas neanmoins toûjours avantageux de faire cette diviſion, parce que quelquefois il peut arriver une Puiſſance plus difficile à reſoudre que la propoſée. Dans ce cas au lieu d'abaiſſer la Puiſſance propoſée, il vaudra mieux égaler au cube la Racine quarrée de cette Puiſſance, quand elle en aura une.

Ainſi pour rendre cubique cette Puiſſance $a^4bbx^6+2a^4bbx^5+a^4c^4x^4$, au lieu de la diviſer par le cube x^3, pour avoir cette Puiſſance plus baſſe $abbx^3+2abccxx+a^4cx$, qui

qui n'eſt pas plus facile, égalez ſa Racine quarrée $aabx^3+aaccxx$ au cube d^3x^3, dont le côté eſt dx, pour avoir $x \text{ ↀ } \frac{aacc}{d^3-aab}$, & la Puiſſance propoſée $a^4bbx^6+2a^4bbx^5+a^4c^4x^4$, ſe changera en un cube, dont le côté ſera $\frac{a^4c+dd}{d^6-2aabd^3+a^4bb}$.

Si vous voulez rendre cubique la Puiſſance plus baſſe $abbx^3+2abccxx+ac^4x$, vous trouverez qu'elle a ces deux nombres produiſans $bbxx+2bccx+c^4$, ax, dont le premier a ſa Racine quarrée $bx+cc$, laquelle étant égalée au ſecond ax, donnera $x \text{ ↀ } \frac{cc}{a-b}$, & la Puiſſance propoſée $a^4bbx^6+2a^4bbxx+a^4c^4x^4$, ſe changera en un cube, dont le côté ſera $\frac{aac+}{au-2ab+bb}$; qui a encore ſa Racine quarrée $\frac{acc}{a-b}$.

Ou bien multipliez cette Racine quarrée $bx+cc$ par le quarré $aaxx$ de l'autre nombre produiſant ax, & vous aurez cette nouvelle Puiſſance à égaler au cube, $aabx^3+aaccxx$, pour le côté duquel prenant dx, on trouvera $x \text{ ↀ } \frac{aacc}{d^3-aab}$, comme auparavant.

Ainſi vous voyez qu'une ſemblable Puiſſance ſe peut égaler au cube en deux façons, dont cette derniere eſt plus générale que la précedente, que nous avions ſeulement enſeignée au Problême précedent.

Si la Puiſſance propoſée a deux nombres produiſans, dont l'un ſoit cubique, il ſuffira d'égaler au Cube l'autre nombre produiſant, pour rendre cubique la Puiſſance propoſée, parce que le produit de deux Cubes eſt un Cube.

Ainſi pour rendre cubique cette Puiſſance, $x^6-6aax^4-8a^3x^3-3a^4xx$, qui a ces deux nombres produiſans

$x^3+3axx+3aax+a^3$, x^3-3axx, dont le premier a ſa Racine cubique $x+a$; on égalera le ſecond, x^3-3axx, au Cube. $\frac{b^3c^3}{c^3}$, dont le côté eſt $\frac{bx}{c}$, & l'on trouvera $x \propto \frac{3ac^3}{b^3-c^3}$, & la Puiſſance propoſée $x^6-6aax^4-8a^3x^3-3a^4xx$, ſe changera en un Cube, dont le côté ſera $\frac{6abc^5+3aab^4cc}{b^6-2b^3c^3+c^6}$.

PROBLEME XII.

Egaler au Cube une Puiſſance, où il y a pluſieurs lettres inconnuës.

LA maniere d'égaler au Cube une Puiſſance, qui contient pluſieurs lettres inconnuës, eſt la même que celle que nous avons enſeignée dans les quatre Problêmes précedens: & par la liberté qu'on a, de changer comme l'on voudra les lettres inconnuës ou indéterminées, on peut d'autant plus facilement, & par d'autres moyens rendre cubique une Puiſſance, parce qu'on lui peut ajoûter les conditions qui lui manquent, pour pouvoir être égalée au Cube, comme vous avez déja vû à l'égard des quarrez, & comme vous allez encore voir pour les Cubes.

Pour égaler au Cube cette Puiſſance, $xxy-axy+aay$, qui n'a aucun terme cubique, on la reduira en une autre, où le dernier terme ſoit cubique, ſçavoir en égalant le terme aay au Cube c^3, & l'on trouvera $y \propto \frac{c^3}{aa}$, & au lieu de la Puiſſance propoſée $xxy-axy+aay$, on aura celle-ci, $\frac{c^3xx}{aa}-\frac{c^3x}{a}+c^3$, dont le dernier terme c^3 eſt cubique, c'eſt pourquoi on la pourra égaler

ler à ce cube c^3, & l'on trouvera $x \propto a$, & à cauſe de $y \propto \frac{c^3}{aa}$, la Puiſſance propoſée $xxy - axy + aay$, ſe changera en ce cube c^3, dont le côté eſt c.

Ou bien faites évanoüir les deux termes xxy, axy, qui ſont de contraire affection, par cette Equation, $xxy - axy \propto o$, dans laquelle vous trouverez, $x \propto a$, & au lieu de la Puiſſance propoſée $xxy - axy + aay$, vous aurez celle-ci à égaler au cube, aay, pour le côté duquel prenant b, en ſorte qu'on ait cette Equation, $aay \propto b^3$, on trouvera $y \propto \frac{b^3}{aa}$, & à cauſe de $x \propto a$, la Puiſſance propoſée $xxy - axy + aay$, ſe changera en ce cube b^3, dont le côté eſt b.

Pour égaler au Cube cette Puiſſance, $a^3x^3 + aabxxy - a^3xyy + aaby^3$, prenez $ax + \frac{1}{3}by$ pour le côté de ce cube, lequel par conſéquent ſera $a^3x^3 - aabxxy + \frac{1}{3}abbxyy - \frac{1}{27}b^3y^3$, de ſorte que vous aurez cette Equation, $a^3x^3 - aabxxy - a^3xyy + aaby^3 \propto a^3x^3 - aabxxy + \frac{1}{3}abbxyy - \frac{1}{27}b^3y^3$, dans laquelle vous trouverez en entiers, $x \propto 27aab + b^3$, & $y \propto 27a^3 + 9abb$, & la Puiſſance propoſée $a^3x^3 - aabxxy - a^3xyy + aaby^3$ ſe changera en ce Cube, $5832a^9b^3 + 1944a^7b^5 + 216a^5b^7 - 8a^3b^9$, dont le côté eſt $18a^3b - 2ab^3$.

Ou bien parce que la Puiſſance propoſée $a^3x^3 - aabxxy - a^3xyy + aaby^3$, a ces deux nombres produiſans, $aaxx - aayy$, $ax - by$, on égalera le premier au quarré du ſecond, par cette Equation, $aaxx - aayy \propto aaxx - 2abxy + bbyy$, dans laquelle on trouvera en entiers, $x \propto aa + bb$, & $y \propto 2ab$, & la Puiſſance propoſée $a^3x^3 - aabxxy - a^3xyy + aaby^3$, ſe changera en ce Cube, $a^9 - 3a^7b + 3a^5b^4 - a^3b^6$, dont le côté eſt $a^3 - ab^3$.

Ou bien encore parce que la même Puiſſance propoſée $a^3x^3 - aabxxy - a^3xyy + aaby^3$, a ces trois nombres produiſans, $ax + ay$, $ax - by$, $ax - ay$, on les ren-

dra proportionnels, en égalant le produit des deux extrêmes au quarré du moyen, par cette Equation, $aaxx-aayy \propto aaxx-2abxy+bbyy$, dans laquelle on trouvera en entiers, $x \propto aa+bb$, & $y \propto 2ab$, comme auparavant.

Ou bien encore parce que la Puiſſance propoſée, $a^3x^3-aabxxy-a^3xyy+aaby^3$, a ces trois nombres produiſans, aa, $xx-yy$, $ax-by$, on les égalera entre eux par ces deux Equations,

$$aa \propto ax-by.$$
$$aa \propto xx-yy.$$

Dans la premiere $aa \propto ax-by$, on trouvera $x \propto a+\frac{by}{a}$, & par conſéquent $xx \propto aa+2by+\frac{bbyy}{aa}$, & la ſeconde Equation $aa \propto xx-yy$, ſe changera en celle-ci, $aa \propto aa+2by+\frac{bbyy}{aa}-yy$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{2aab}{aa-bb}$, & au lieu de $x \propto a+\frac{by}{a}$, on aura $x \propto \frac{a^3+abb}{aa-bb}$, ou bien on aura en entiers & en moindres termes, $x \propto aa+bb$, & $y \propto 2ab$, comme auparavant.

Pour égaler au Cube cette Puiſſance $x^3+abx+y^3$, prenez $x+y$ pour le côté de ce Cube, lequel par conſéquent ſera $x^3+3xxy+3xyy+y^3$, de ſorte qu'on aura cette Equation, $x^3+abx+y^3 \propto x^3+3xxy+3xyy+y^3$,

---

dans laquelle on trouvera $y \propto \sqrt{\frac{1}{4}xx+\frac{1}{2}ab}-\frac{1}{2}x$, & l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $\frac{1}{4}xx+\frac{1}{2}ab$, pour le côté duquel prenant $\frac{1}{2}x+c$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $\frac{1}{4}xx+\frac{1}{2}ab \propto \frac{1}{4}xx+cx+cc$, on trouvera $x \propto \frac{ab}{3c}-c$, & par conſéquent $y \propto c$, & la Puiſſance propoſée, $x^3+abx+y^3$, ſe changera en ce Cube, $\frac{a3b3}{27c3}$, dont le côté eſt $\frac{ab}{3c}$.

PRO-

PROBLEME XIII.

Egaler au Cube une Fraction.

Fraction où la lettre inconnuë a une dimenſion.

SI dans la Fraction propoſée la lettre inconnuë n'a qu'une dimenſion, on la pourra toûjours rendre cubique en l'égalant à tel cube indéterminé que l'on voudra.

Ainſi pour rendre cubique cette Fraction $\frac{x+a}{2x-3a}$, on l'égalera au Cube indéterminé $\frac{b^3}{c^3}$, dont le côté eſt $\frac{b}{c}$, de ſorte qu'on aura cette Equation, $\frac{x+a}{2x-3a} \propto \frac{b^3}{c^3}$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{3ab^3+ac^3}{2b^3-c^3}$, & la Fraction propoſée $\frac{x+a}{2x-3a}$ ſe changera en ce Cube $\frac{b^3}{c^3}$, dont le côté eſt $\frac{b}{c}$.

Il eſt évident que quand on égale ainſi au Cube une ſemblable Fraction, c'eſt la même choſe que donner au Dénominateur & au Numerateur de la même Fraction la raiſon de deux Cubes indéterminez, ou que de multiplier le Numerateur par un Cube indéterminé, & le Dénominateur par un autre Cube indéterminé.

Mais on peut autrement égaler au Cube une ſemblable Fraction, lorſque la lettre inconnuë ſe trouvera ſeulement dans le Numerateur, ou dans le Dénominateur: ſçavoir en égalant au Cube le produit ſous la partie de la Fraction où la lettre inconnuë ſe rencontre, & le quarré de l'autre partie où elle ne ſe rencontre pas.

Comme pour égaler au Cube cette Fraction $\frac{x+a}{a-b}$, où la lettre inconnuë ſe trouve ſeulement dans le Numerateur

merateur $x+a$, on multipliera ce Numerateur $x+a$ par le quarré $aa-2ab+bb$ du Dénominateur $a-b$, & l'on aura ce produit à égaler au Cube, $aax-2abx+bbx+a^3-2aab+abb$, pour le côté duquel prenant c on trouvera $x \propto \frac{c^3+2aab-abb-a^3}{aa-2ab+bb}$, & au lieu de la Fraction propoſée $\frac{x+a}{a-b}$, on aura ce Cube $\frac{c^3}{a^3-3aab+3aab-b^3}$, dont le côté eſt $\frac{c}{a-b}$.

De même pour égaler au Cube cette Fraction, $\frac{2b}{3x}$, où la lettre inconnuë ſe trouve ſeulement dans le Dénominateur $3x$, on multipliera ce Dénominateur $3x$ par le quarré $4bb$ du Numerateur $2b$, & l'on aura ce produit à égaler au Cube $12bbx$, pour le côté duquel prenant c, en ſorte qu'on ait cette Equation, $12bbx \propto c^3$, on trouvera $x \propto \frac{c^3}{12bb}$, & la Fraction propoſée $\frac{2b}{3x}$, ſe changera en ce Cube $\frac{8b^3}{c^3}$, dont le côté eſt $\frac{2b}{c}$.

Parce que la lettre inconnuë x ſe trouve ſeule dans le Dénominateur $3x$, on pourra auſſi multiplier le quarré $9xx$ de ce Dénominateur $3x$ par le Numerateur $2b$, & alors on aura ce produit à égaler au Cube $18bxx$, pour le côté duquel prenant $\frac{cx}{d}$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $18bxx \propto \frac{c^3x^3}{d^3}$, on trouvera $x \propto \frac{18bd^3}{c^3}$, & la Fraction propoſée $\frac{2b}{3x}$, ſe changera en ce Cube $\frac{c^3}{27d^3}$. dont le côté eſt $\frac{c}{3d}$.

Pareillement parce que la lettre inconnuë x ſe trouve ſeule dans le Numerateur $ax+bx$ de cette Fraction $\frac{ax+bx}{cd}$, on multipliera le quarré $aaxx+2abxx+bbxx$ de

de ce Numerateur $ax+bx$, par le Dénominateur cd, & l'on aura ce produit à égaler au Cube, $aacdxx+2abcdxx+bbcdxx$, pour le côté duquel prenant mx, en ſorte qu'on ait cette Equation, $aacdxx+2abcdxx+bbcdxx \mathrel{)\!(} m^3x^3$, on trouvera $x \mathrel{)\!(} \frac{aacd+2abcd+bbcd}{m^3}$, & la Fraction propoſée $\frac{ax+bx}{cd}$, ſe changera en ce Cube $\frac{a^3+3aab+3abb+b^3}{m^3}$, dont le côté eſt $\frac{a+b}{m}$.

On pourra auſſi par une ſemblable Multiplication égaler au Cube une Fraction, où la lettre inconnuë ſe trouve dans le Numerateur & dans le Dénominateur, pourvû que le produit ſous le terme connu du Numerateur, & le quarré du terme connu du Dénominateur, ou ſous le terme connu du Dénominateur & le quarré du terme connu du Numerateur ſoit un Cube: ou bien pourvû que le produit ſous le terme inconnu du Numerateur & le quarré du terme inconnu du Dénominateur, ou ſous le terme inconnu du Dénominateur & le quarré du terme inconnu du Numerateur ſoit un Cube.

Ainſi pour égaler au Cube cette Fraction $\frac{x+a}{2x+8a}$, où le produit ſolide $64a^3$, ſous le terme connu a du Numerateur & le quarré $64aa$ du terme connu $8a$ du Dénominateur, eſt un nombre cubique, auſſi bien que le produit ſolide $8a^3$ ſous le terme connu $8a$ du Dénominateur & le quarré aa du terme connu a, du Numerateur; multipliez le Dénominateur $2x+8a$ par le quarré $xx+2ax+aa$ du Numerateur $x+a$, & vous aurez ce produit à égaler au Cube, $2x^3+12axx+18aax+8a^3$, pour le côté duquel prenant $2a+\frac{1}{2}x$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $2x^3+12axx+18aax+8a^3 \mathrel{)\!(} 8a^3+18aax+\frac{27}{2}axx+\frac{27}{8}x^3$, l'on trouvera $x \mathrel{)\!(} -\frac{12a}{11}$, & la Fraction propoſée $\frac{x+a}{2x+8a}$ ſe changera en ce Cube $\frac{1}{64}$, dont le côté eſt $\frac{1}{4}$.

Ou

Ou bien multipliez le Numerateur $x+a$ par le quarré $4xx+32ax+64aa$ du Dénominateur $2x+8a$, & vous aurez ce produit à égaler au Cube, $4x^3+36axx+96aax+64a^3$, pour le côté duquel prenant $4a+2x$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $4x^3+36axx+96aax+64a^3 \propto 64a^3+96aax+48axx+8x^3$, l'on trouvera $x \propto -3a$, & la Fraction propoſée $\frac{x+a}{2x+8a}$ ſe changera en ce Cube 1, dont le côté eſt 1.

Pareillement pour égaler au Cube cette Fraction, $\frac{x+2a}{8x+4a}$, où le produit ſolide $8x^3$ ſous le terme inconnu $8x$ du Dénominateur & le quarré xx du terme connu x du Numerateur eſt un Cube, auſſi-bien que le produit ſolide $64x^3$ ſous le terme inconnu x du Numerateur & le quarré $64xx$ du terme inconnu $8x$ du Dénominateur, multipliez le Dénominateur $8x+4a$, par le quarré $xx+4ax+4aa$ du Numerateur $x+2a$, & vous aurez ce produit à égaler au Cube, $8x^3+36axx+48aax+16a^3$, pour le côté duquel prenant $2x+3a$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $8x^3+36axx+48aax+16a^3 \propto 8x^3+36axx+54aax+27a^3$, on trouvera $x \propto -\frac{11a}{6}$, & la Fraction propoſée $\frac{x+2a}{8x+4a}$, ſe changera en ce Cube $-\frac{1}{64}$, dont le côté eſt $-\frac{1}{4}$.

Ou bien multipliez le Numerateur $x+2a$ par le quarré $64xx+64ax+16aa$ du Dénominateur $8x+4a$, & vous aurez ce produit à égaler au Cube, $64x^3+192axx+144aax+32a^3$, pour le côté duquel prenant $4x+4a$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $64x^3+192axx+144aax+32a^3 \propto 64x^3+192axx+192aax+64a^3$, on trouvera $x \propto -\frac{1}{3}a$, & la Fraction propoſée $\frac{x+2a}{8x+4a}$, ſe changera en ce Cube 1, dont le côté eſt 1.

Si

Si l'une des deux parties de la Fraction proposée est un quarré, on multipliera le côté de ce quarré par l'autre partie, & on égalera au Cube le produit.

Comme pour rendre cubique cette Fraction, $\frac{ax}{bb}$, dont le Dénominateur bb a sa Racine quarrée b, multipliez cette Racine quarrée par le Numerateur ax, & le produit abx étant égalé au Cube c^3, donnera $x \propto \frac{c^3}{ab}$, & la Fraction proposée $\frac{ax}{bb}$, se changera en ce Cube $\frac{c^3}{b^3}$, dont le côté est $\frac{c}{b}$.

De même pour rendre cubique cette Fraction, $\frac{aa-2ab+bb}{ax-ab}$, dont le Numerateur $aa-2ab+bb$, a sa Racine quarrée $a-b$, on multipliera cette Racine quarrée $a-b$ par le Dénominateur $ax-ab$, & l'on aura ce produit à égaler au Cube, $aax-abx+abb-aab$, pour le côté duquel prenant c, en sorte qu'on ait cette Equation, $aax-abx+abb-aab \propto c^3$, on trouvera $x \propto \frac{c^3+aab-abb}{aa-ab}$, & la Fraction proposée $\frac{aa-2ab+bb}{ax-ab}$, se changera en ce Cube, $\frac{a^3-3aab+3abb-b^3}{c^3}$, dont le côté est $\frac{a-b}{c}$.

Fraction où la lettre inconnuë a deux ou trois dimensions.

Cette regle peut servir à quelques Fractions où la lettre inconnuë a deux ou trois dimensions, quand elles sont de la nature de celles que nous allons proposer dans les deux exemples suivans.

Pour rendre cubique cette Fraction, $\frac{xx+2ax+aa}{aa-ab}$ on multipliera le Dénominateur $aa-ab$, par la Racine quarrée $x+a$ du Numerateur $xx+2ax+aa$, & le produit $aax-abx+a^3-aab$ étant égalé au Cube c^3, dont

dont le côté eſt c, on trouvera $x \propto \frac{c^3+2ab-a^3}{aa-ab}$, & la Fraction propoſée $\frac{xx+2ax+aa}{aa-ab}$, ſe changera en ce Cube $\frac{c^6}{a^6-3a^5b+3a^4bb-a^3b^3}$, dont le côté eſt $\frac{c^3}{aa-ab}$.

De même pour rendre cubique cette Fraction, $\frac{xx-8aa}{xx+2ax+aa}$, on multipliera le Numerateur $xx-8aa$ par la Racine quarrée $x+a$ du Dénominateur $xx+2ax+aa$, & l'on aura ce produit à égaler au Cube, $x^3+axx-8aax-8a^3$, pour le côté duquel prenant $x-2a$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $x^3+axx-8aax-8a^3 \propto x^3-6axx+12aax-8a^3$, on trouvera $x \propto \frac{20}{7}a$, & la Puiſſance propoſée $\frac{xx-8aa}{xx+2ax+aa}$ ſe changera en ce Cube $\frac{8}{125}$, dont le côté eſt $-\frac{2}{5}$.

Pareillement pour rendre cubique cette Fraction, $\frac{abx^3+abbxx}{aa+2ab+bb}$, on multipliera le Numerateur $abx^3+abbxx$ par la Racine quarrée $a+b$ du Dénominateur $aa+2ab+bb$, & le produit $aabx^3+abbx^3+ab^3xx+aabbxx$, étant égalé au Cube c^3x^3, dont le côté eſt cx, donnera $x \propto \frac{ab^3+aabb}{c^3-aab-abb}$, & la Fraction propoſée $\frac{abx^3+abbxx}{aa+2ab+bb}$, ſe changera en un Cube, dont le côté ſera $\frac{abbc}{c^3-aab-abb}$.

Fraction où il y a pluſieurs lettres inconnuës.

Si l'une des deux parties de la Fraction propoſée n'eſt pas quarrée, il la faut égaler au quarré, pour la rendre quarrée, & pour cela il faut que la Fraction contienne pluſieurs lettres inconnuës ou indéterminées.

Comme pour rendre cubique cette Fraction, $\frac{xx-2bx+yy}{ax-ab}$, dont le Numerateur, ni le Dénominateur

ne

ne ſont point quarrez; ſi vous voulez rendre quarré le Numerateur $xx-2bx+yy$, égalez-le au quarré $xx-2bx+bb$, dont le côté eſt $x \ldots b$, & vous trouverez $y \propto b$, & le Numerateur $xx-2bx+yy$ ſe changera en ce quarré, $xx-2bx+bb$, dont le côté $x-b$ étant multiplié par le Dénominateur $ax-ab$, on aura ce produit à égaler au Cube $axx-2abx+abb$, pour le côté duquel prenant c, en ſorte qu'on ait cette Equation, $axx-2abx+abb \propto c^3$, on trouvera $x \propto b+\sqrt{\frac{c^3}{a}}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $\frac{c^3}{a}$, pour le côté duquel prenant $\frac{cd}{m}$, on trouvera $c \propto \frac{add}{mm}$. & par conſéquent $x \propto b+\frac{ad^3}{m^3}$, & à cauſe de $y \propto b$, la Fraction propoſée $\frac{xx-2bx+yy}{ax-ab}$, ſe changera en ce Cube $\frac{d^3}{m^3}$, dont le côté eſt $\frac{d}{m}$.

Si vous voulez rendre quarré le Dénominateur $ax-ab$, égalez-le au quarré indéterminé cc, pour avoir $x \propto \frac{ab+cc}{a}$, & au lieu de la Fraction propoſée $\frac{xx-2bx+yy}{ax-ab}$, vous aurez celle-ci, $\frac{c^4-aabb+aayy}{aacc}$, dont le Dénominateur $aacc$, a ſa Racine quarrée ac, que vous multiplierez par le Numerateur $c^4-aabb+aayy$, & vous aurez ce produit à égaler au Cube, $ac^5-a^3bbc+a^3cyy$. Pour cette fin il faut détruire les deux derniers termes a^3bbc, a^3cyy, qui ſont de contraire affection, par cette Equation, $a^3cyy-a^3bbc \propto o$, dans laquelle vous trouverez $y \propto b$, & au lieu du produit $ac^5-a^3bbc+a^3cyy$, vous aurez celui-ci à égaler au Cube ac^5, pour le côté duquel prenant $\frac{mcc}{d}$, en ſorte qu'on ait cette Equa-

Equation, $ac^5 \propto \frac{m^3c^6}{d^3}$, on trouvera $c \propto \frac{ad^3}{m^3}$, & par conſéquent $x \propto b + \frac{ad^6}{m^6}$, & à cauſe de $y \propto b$, la Fraction propoſée $\frac{xx-2bx+yy}{ax-ab}$, ſe changera en ce Cube d^6, dont le côté eſt dd, qui a encore ſa Racine quarrée d.

PROBLEME XIV.

Egaler au Quarré-quarré une Puiſſance.

Puiſſance où la lettre inconnuë n'a qu'une dimenſion.

SI dans la Puiſſance propoſée la lettre inconnuë n'a qu'une dimenſion, on la rendra quarré-quarrée en l'égalant à tel quarré-quarré indéterminé que l'on voudra, comme nous avons déja fait pour les quarrez & pour les cubes, & comme nous allons encore faire voir pour les quarré-quarrez, la même methode ſe pouvant apliquer aux Puiſſances plus élevées.

Ainſi pour rendre quarré-quarrée, cette Puiſſance $a^3x+aabb$, on l'égalera au quarré-quarré indéterminé c^4, par cette Equation, $a^3x+aabb \propto c^4$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{c^4-aabb}{a^3}$, & la Puiſſance propoſée $a^3x+aabb$ ſe changera en ce quarré-quarré c^4, dont le côté eſt c.

Puiſſance où la lettre inconnuë a pluſieurs dimenſions.

C'eſt de la même façon que l'on rendra quarré-quarrée cette Puiſſance $a^3x^5-abbcx^4$, car ſi on la diviſe par le quarré-quarré x^4, l'on aura en moindres termes cette autre Puiſſance à égaler au quarré-quarré, $a^3x-abbc$, pour le côté duquel prenant d, on trouvera $x \propto \frac{abbc+d^4}{a^3}$.

Si $a \propto 1$, $b \propto 1$, & $c \propto 1$, & que l'on ſuppoſe $d \propto 2$, on trouvera $x \propto 17$, & la Puiſſance propoſée $a^3x^5-abbcx^4$, ſe changera en ce quarré-quarré 1336336, dont le côté eſt 34.

Mais

Mais pour égaler au quarré-quarré cette autre Puiſſance x^4+ax^3, on l'égalera au quarré-quarré $\frac{b^4x^4}{c^4}$, dont le côté eſt $\frac{bx}{c}$, & l'on trouvera $x \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} \frac{ac^4}{b^4-c^4}$, & la Puiſſance propoſée x^4+ax^3, ſe changera en ce quarré-quarré, $\frac{a^4c^{16}}{b^{16}-4b^{12}c^4+6b^8c^8-4b^4c^{12}+c^{16}}$, dont le côté eſt $\frac{ac^4}{b^4-c^4}$.

Ou bien égalez premierement la Puiſſance propoſée x^4+2ax^3 au quarré x^4-2bx^3+bbxx, dont le côté eſt $xx...bx$, par cette Equation, $x^4+2ax^3 \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} x^4-2bx^3+bbxx$, dans laquelle vous trouverez $x \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} \frac{bb}{a+2b}$, & au lieu du côté précedent $xx...bx$, vous aurez en entiers & moindres termes celui-ci, $bb+ab$, qu'il faut encore égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $b...c$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $bb+ab \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} bb-2bc+cc$, on trouvera $b \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} \frac{cc}{a+2c}$, &c.

Si $a \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} 1$, & que l'on ſuppoſe $c \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} 1$, on trouvera $b \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} \frac{1}{3}$, & $x \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} \frac{1}{12}$, & la Puiſſance propoſée x^4+ax^3, ſe changera en ce quarré-quarré $\frac{16}{20736}$, dont le côté eſt $\frac{2}{12}$.

Puiſſance où il y a pluſieurs lettres inconnuës.

C'eſt de la même façon que l'on rendra quarré-quarrée une Puiſſance, où il y aura pluſieurs lettres inconnuës, ſçavoir en l'égalant premierement à un quarré, & en égalant le côté de ce quarré à un autre quarré.

Ainſi pour rendre quarré-quarrée cette Puiſſance, $xx-4xy+yy$, il la faut premierement égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $x \ldots \frac{ay}{b}$, on trouvera en entiers $x \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} aa-bb$, & $y \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} 2ab-4bb$, & au lieu du côté précedent $x...\frac{ay}{b}$, on aura celui-ci à égaler au quarré, $aa-4ab$

$-4ab+bb$, pour le côté duquel prenant $a \ldots \frac{bc}{d}$, on trouvera en entiers $a \propto cc-dd$, & $b \propto 2cd-4dd$, & par conſéquent $x \propto c^4-6ccdd+16d^3c-15d^4$, & $y \propto 4c^3d-24ccdd+60cd^3-56d^4$.

Si l'on ſuppoſe $c \propto 3$, & $d \propto 1$, on trouvera $a \propto 8$, $b \propto 2$, $x \propto 60$, & $y \propto 16$, & la Puiſſance propoſée, $xx-4xy+yy$, ſe changera en ce quarré-quarré 16, dont le côté eſt 2.

Ou bien égalez la Puiſſance propoſée $xx-4xy+yy$, au quarré yy, pour avoir $y \propto \frac{1}{4}x$, & la Puiſſance propoſée $xx-4xy+yy$, ſe changera en ce quarré $\frac{1}{12}xx$, dont le côté eſt $\frac{1}{4}x$, qu'il faut encore égaler au quarré, pour le côté duquel prénant a, en ſorte qu'on ait cette Equation, $\frac{1}{4}x \propto aa$, on trouvera $x \propto 4aa$, & par conſéquent $y \propto aa$, & la Puiſſance propoſée $xx-4xy+yy$, ſe changera en ce quarré-quarré a^4, dont le côté eſt a.

Ou bien encore ſuppoſez $y \propto \frac{ax}{b}$, & au lieu de la Puiſſance propoſée $xx-4xy+yy$, vous aurez celle-ci à égaler au quarré-quarré, $xx-\frac{4axx}{b}+\frac{aaxx}{bb}$: ſi vous l'égalez au quarré-quarré $\frac{x^4}{b^4}$, vous trouverez $x \propto \sqrt{b^4-4ab^3+aabb}$. Ainſi vous aurez cette Puiſſance à égaler au quarré, b^4-4ab^3+aabb, pour le côté duquel prenant $bb+ac$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $b^4-4ab^3+aabb \propto b^4+2abbc+aax$, on trouvera $a \propto \frac{2bbc+4b^3}{bb-cc}$, & par conſéquent $x \propto \frac{b^4+bbcc+4b^3c}{bb-cc}$, & $y \propto \frac{4b^6+18b^5c+12b^4cc+2b^3c^3}{b^4-2bbcc+c^4}$.

Si l'on ſuppoſe $b \propto 2$, & $c \propto 1$, on trouvera $a \propto \frac{40}{3}$, $x \propto \frac{22}{3}$, & $y \propto \frac{1040}{9}$, & la Puiſſance propoſée $xx-4xy+yy$,

$+yy$, ſe changera en ce quarré-quarré 456976, dont le côté eſt 26.

Parce que dans cet exemple les deux quantitez indéterminées x, y, ne montent qu'au ſecond degré, on pourra ſe contenter de leurs deux premieres valeurs trouvées, & les changer en deux autres, qu'on trouvera en les multipliant chacune par le côté du premier quarré.

Ainſi ayant trouvé par la premiere methode $aa-bb$, $2ab-4bb$, pour les deux premieres valeurs de x & de y, on les multipliera par le côté du premier quarré, ſçavoir par $aa-4ab+bb$, & l'on aura $x \propto a^4-4a^3b+4ab^3-b^4$, & $y \propto 2a^3b-12aabb+18ab^3-4b^4$.

Si $a \propto 1$, & $b \propto 2$, on trouvera $x \propto 9$, & $y \propto 36$, & la Puiſſance propoſée $xx-4xy+yy$, ſe changera en ce quarré-quarré 81, dont le côté eſt 3.

Il eſt évident que pour égaler au quarré-quarré une Puiſſance qui a deux nombres produiſans, dont l'un eſt cubique, il n'y a qu'à égaler le côté de ce cube à l'autre nombre produiſant.

Comme pour égaler au quarré-quarré cette Puiſſance, $2x^4+4ax^3-4a^3x-2a^4$, qui a ces deux nombres produiſans, $x^3+3axx+3aax+a^3$, $2x-2a$, dont le premier a ſa Racine cubique $x+a$, égalez cette Racine cubique $x+a$ au ſecond $2x-2a$, par cette Equation, $x+a \propto 2x-2a$, dans laquelle vous trouverez $x \propto 3a$, & la Puiſſance propoſée $2x^4+4ax^3-4a^3x-2a^4$, ſe changera en ce quarré-quarré $256a^4$, dont le côté eſt $4a$.

Ce que nous omettons ici ſe trouvera ſans peine par celui qui aura bien conçû les regles précedentes, & pour vous les faire encore mieux comprendre, & vous en faire voir en même tems l'uſage & l'application, nous avons trouvé à propos d'ajoûter ici les Queſtions ſuivantes.

QUESTION I.

Trouver deux nombres, tels que la ſomme de leurs quarrez ſoit un nombre quarré.

SI l'on met x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, on aura ſelon la condition de la Queſtion cette Puiſſance à égaler au quarré, $xx+yy$, pour le côté duquel prenant $x \ldots \frac{ey}{b}$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $xx+yy \propto xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb}$, on trouvera en entiers, $x \propto aa-bb$, & $y \propto 2ab$, pour les deux nombres qu'on cherche, qui ſont les deux côtez d'un triangle rectangle, de ſorte que

Si l'on ſuppoſe $a \propto 2$, & $b \propto 1$, ou $a \propto 1$, & $b \propto 2$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront 3, 4, & le triangle rectangle ſera 3. 4, 5, dont les nombres générateurs ſont 1, 2, ſçavoir a, b.

On peut autrement rendre quarrée la Puiſſance précedente $xx+yy$, ſçavoir en l'égalant au quarré indéterminé zz, & alors on trouvera $y \propto \sqrt{zz-xx}$, & ainſi on aura cette Puiſſance à égaler au quarré $zz-xx$, dont les deux nombres produiſans ſont $z+x$, $z-x$, & comme on ne les peut pas égaler enſemble, on multipliera le premier $z+x$ par le quarré indéterminé bb, & le ſecond $z-x$ par le quarré indéterminé aa, & on égalera enſemble les deux produits, par cette Equation, $aaz-aax \propto bbz+bbx$, dans laquelle on trouvera en entiers, $z \propto aa+bb$, & $x \propto aa-bb$, & par conſéquent $y \propto 2ab$.

Ainſi l'on a en lettres ce triangle rectangle, $aa-bb$, $2ab$, $aa+bb$, dont les nombres generateurs ſont a & b, où vous voyez que le premier côté $aa-bb$, eſt égal à la difference des quarrez des deux nombres gene-

generateurs, & l'hypotenuſe $aa+bb$ à la ſomme des mêmes quarrez, & que l'autre côté $2ab$, eſt égal au double du produit ſous les mêmes nombres generateurs.

QUESTION II.

Trouver deux nombres, dont le produit recevant le quarré de chacun, produiſe deux nombres quarrez.

SI l'on met x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, l'on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$xx+xy.$$
$$yy+xy.$$

Egalez la premiere Puiſſance $xx+xy$ au quarré $\frac{aaxx}{bb}$, pour avoir $y \propto \frac{aax}{bb}-x$: & la deuxiéme $yy+xy$ au quarré $\frac{ccyy}{dd}$, pour avoir le même $y \propto \frac{ddx}{cc-dd}$, & par conſéquent cette Equation, $\frac{aax}{bb}-x \propto \frac{ddx}{cc-dd}$, dans laquelle on trouvera $d \propto \frac{c}{a}\sqrt{aa-bb}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $aa-bb$, pour le côté duquel prenant $a \ldots \frac{mb}{n}$, on trouvera en entiers $a \propto mm+nn$, & $b \propto 2mn$, & au lieu de $d \propto \frac{c}{a}\sqrt{aa-bb}$, on aura $d \propto \frac{cmm-cnn}{mm+nn}$, ou bien en entiers on aura $c \propto mm+nn$, & $d \propto mm-nn$, & au lieu de $y \propto \frac{aax}{bb}-x$, ou de $y \propto \frac{ddx}{cc-dd}$, l'on aura $y \propto \frac{m^4x-2mmnnx+n^4x}{4mmmn}$, ou bien l'on aura en entiers $x \propto 4mmnn$, & $y \propto m^4-2mmnn+n^4$, pour les deux nombres qu'on cherche, leſquels ſont deux nombres quarrez, ſçavoir les quarrez des deux côtez

d'un triangle rectangle, leur ſomme $m^4+2mmnn+n^4$ étant le quarré de l'hypotenuſe du même triangle. D'où il ſuit que ces deux mêmes nombres ainſi trouvez ſont les ſegmens de l'hypotenuſe d'un autre triangle rectangle ſemblable, dont l'hypotenuſe eſt un nombre quarré : car ainſi leur produit, ou le quarré de la perpendiculaire, qui tombe de l'angle droit ſur la même hypotenuſe, étant ajoûté au quarré de chacun, comme la Queſtion le demande, fera bien deux nombres quarrez, ſçavoir les quarrez des deux côtez du même triangle rectangle.

Si l'on ſuppoſe $m \gtrdot 2$, & $n \gtrdot 1$, ou $m \gtrdot 1$, & $n \gtrdot 2$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront 16, 9, qui ſont les quarrez des deux côtez de ce triangle rectangle 3, 4, 5, ou bien les ſegmens de l'hypotenuſe de cet autre triangle rectangle ſemblable 15, 20, 25, dont l'hypotenuſe 25 eſt le quarré de l'hypotenuſe 5 du premier triangle rectangle ſemblable 3, 4, 5.

QUESTION III.

Trouver trois nombres, tels que ſi au plan de deux quelconques on ajoûte le plan ſous la ſomme de ces deux nombres & un même nombre donné, il vienne trois nombres quarrez.

SI l'on met x, y, z, pour les trois nombres qu'on cherche, & a, pour le nombre donné, on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces trois Puiſſances à égaler au quarré,

$$xy+ax+ay.$$
$$xz+ax+az.$$
$$yz+ay+az.$$

Si on égale la premiere $xy+ax+ay$ au quarré bb, la deuxiéme $xz+ax+az$, au quarré dd, & la troiſiéme

me $yz+ay+az$ au quarré cc, l'on aura ces trois Equations à reſoudre,

$$xy+ax+ay \propto bb.$$
$$xz+ax+az \propto dd$$
$$yz+ay+az \propto cc.$$

Dans la premiere $xy+ax+ay \propto bb$, on trouvera $x \propto \frac{bb-ay}{y+a}$, & dans la ſeconde $xz+ax+az \propto dd$, on trouvera le même $x \propto \frac{dd-az}{z+a}$: c'eſt pourquoi on aura cette Equation, $\frac{bb-ay}{y+a} \propto \frac{dd-az}{z+a}$, dans laquelle on trouvera $z \propto \frac{aay+ddy+add-abb}{aa+bb}$; & parce que dans la troiſiéme Equation $yz+ay+az \propto cc$, on trouve le même $z \propto \frac{cc-ay}{y+a}$, l'on aura cette Equation, $\frac{aay+ddy+add-abb}{aa+bb} \propto \frac{cc-ay}{y+a}$, dans laquelle on trouvera $y \propto -a+\sqrt{\frac{a^4+aabb+aacc+bbcc}{aa+dd}}$: & ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $\frac{a^4+aabb+aacc+bbcc}{aa+dd}$, ce qui ſe fera en égalant ſéparément au quarré le Dénominateur $aa+dd$, & les deux parties aliquotes $aa+bb$, $aa+cc$, du Numerateur $a^4+aabb+aacc+bbcc$. Ainſi l'on aura ces trois Puiſſances à égaler au quarré,

$$aa+bb.$$
$$aa+cc.$$
$$aa+dd.$$

Si on égale la premiere $aa+bb$ au quarré $aa-\frac{2abm}{n}+\frac{bbmm}{nn}$, dont le côté eſt $a-\frac{bm}{n}$, on trouvera $b \propto \frac{2amn}{2mn-nn}$: & ſi on égale la deuxiéme $aa+cc$ au quarré $aa-\frac{2apc}{q}$

$\frac{2apc}{q}+\frac{ppcc}{qq}$, dont le côté eſt $a\ldots\frac{pc}{q}$, on trouvera $c\mathrel{)\!\!)}\frac{2apq}{pp-qq}$; & enfin ſi on égale la troiſiéme $aa+dd$ au quarré $aa\frac{2adr}{f}+\frac{rrdd}{ff}$, dont le côté eſt $a\ldots\frac{rd}{f}$, on trouvera $d\mathrel{)\!\!)}\frac{2arf}{rr-ff}$, &c.

Si $a\mathrel{)\!\!)}105$, & que l'on ſuppoſe $m\mathrel{)\!\!)}2, n\mathrel{)\!\!)}1, p\mathrel{)\!\!)}3, q\mathrel{)\!\!)}2, r\mathrel{)\!\!)}4$, & $f\mathrel{)\!\!)}3$, l'on trouvera $b\mathrel{)\!\!)}140, c\mathrel{)\!\!)}252, d\mathrel{)\!\!)}360, x\mathrel{)\!\!)}\frac{1760}{13}, y\mathrel{)\!\!)}\frac{112}{3}$, & $z\mathrel{)\!\!)}480$. Ainſi les trois nombres qu'on cherche ſeront $\frac{1760}{13}, \frac{112}{3}, 480$.

On peut autrement & très-facilement rendre quarrées les trois premieres Puiſſances, & reſoudre ce Problême très-ſimplement, en commençant à reſoudre les deux premieres Puiſſances par la methode des doubles Egalitez de Diophante, comme vous allez voir.

La difference des deux premieres Puiſſances $xy+ax+ay$, $xz+ax+az$, eſt $xy-xz+ay-az$, dont les deux nombres produiſans ſont $y-z$, $x+a$. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}a$, dont le quarré $\frac{1}{4}xx+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}yy-\frac{1}{2}xz-\frac{1}{2}yz+\frac{1}{4}zz+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ay-\frac{1}{2}az+\frac{1}{4}aa$ étant égalé à la plus grande Puiſſance $xy+ax+ay$, on trouvera $x\mathrel{)\!\!)}y+z+a+\frac{1}{2}\sqrt{yz+ay+az}$. Ainſi nous aurons cette Puiſſance à égaler au quarré, $yz+ay+az$, laquelle étant reſoluë, la Queſtion ſera auſſi reſoluë, parce que cette Puiſſance ſe trouve la même que la troiſiéme des trois premieres. Pour donc rendre quarrée cette Puiſſance $yz+ay+az$, ſuppoſez pour une plus grande facilité $z\mathrel{)\!\!)}a$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $2ay+aa$, pour le côté duquel prenant $a+b$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $2ay+aa\mathrel{)\!\!)}aa+2ab+bb$, l'on trouvera $y\mathrel{)\!\!)}\frac{2ab+bb}{2a}$: & pour avoir

une

une ſolution en entiers, ſuppoſez $b \gtrless 2a$, pour avoir $y \gtrless 4a$, & par conſéquent $x \gtrless 12a$. Ainſi les trois nombres qu'on cherche, ſeront $12a$, $4a$, $1a$, qui ſont encore tels que ſi au Plan de deux quelconques on ajoûte le plan ſous le troiſiéme & le même nombre donné, il vient trois nombres quarrez.

Si $a \gtrless 12$, les trois nombres qu'on cherche, ſeront 144, 48, 12.

QUESTION IV.

Trouver trois nombres quarrez, tels que ſi au Plan-plan de deux quelconques on ajoûte le Plan-plan ſous la ſomme de ces deux quarrez & un même nombre quarré donné, il vienne trois nombres quarrez.

SI l'on met xx, yy, zz, pour les trois nombres quarrez qu'on cherche, & aa pour le nombre quarré donné, on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces trois Puiſſances à égaler au quarré,

$$xxyy+aaxx+aayy.$$
$$xxzz+aaxx+aazz.$$
$$yyzz+aayy+aazz.$$

Egalez la premiere Puiſſance $xxyy+aaxx+aayy$ au quarré $xxyy+2abxy+aabb$, dont le côté eſt $xy+ab$, & vous trouverez $b \gtrless \sqrt{xx-\frac{2bxy}{a}+yy}$: ainſi vous aurez cette Puiſſance à égaler au quarré, $xx-\frac{2bxy}{a}+yy$, pour le côté duquel prenant $x...y$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $xx-\frac{2bxy}{a}+yy \gtrless xx-2xy+yy$, on trouvera $b \gtrless a$, & au lieu du côté précedent $xy+ab$, on aura celui ci, $xy+aa$, dont le quarré $xxyy+2aaxy+a^4$, étant égalé à la premiere Puiſſance $xxyy+aaxx+aayy$, l'on trouvera

trouvera $xy \propto x+a$, & les deux dernieres Puiſſances ſe changeront en ces deux autres,

$$xxzz+aaxx+aazz.$$

$$xxzz+2axzz+2aazz+aaxx+2a^3x+a^4.$$

Leur difference eſt $aazz+2axzz+2a^3x+a^4$, qui a ces deux nombres produiſans $aa+2ax$, $aa+zz$. La moitié de leur difference eſt $\frac{1}{2}zz-ax$, dont le quarré $\frac{1}{4}z^4-axzz+aaxx$ étant égalé à la plus petite Puiſſance $xxzz+aaxx+aazz$, l'on trouvera $z \propto 2\sqrt{aa+ax+xx}$. Ainſi l'on aura encore cette Puiſſance à égaler au quarré, $aa+ax+xx$, pour le côté duquel prenant $a...\frac{by}{c}$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $aa+ax+xx \propto aa-\frac{2abx}{c}+\frac{bbxx}{cc}$, on trouvera $x \propto \frac{2abc+acc}{bb-cc}$, & par conſéquent $z \propto \frac{2abb+2abc+2acc}{bb-cc}$, & $y \propto \frac{abb+2abc}{bb-cc}$. Ainſi les côtez des trois quarrez qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{2abc+acc,\ abb+2abc,\ 2abb+2abc+2acc}{bb-cc}.$$

Si $a \propto 12$, & que l'on ſuppoſe $b \propto 2$, & $c \propto 1$, l'on trouvera $x \propto 20$, $y \propto 32$, & $z \propto 56$, & les trois quarrez qu'on cherche, ſeront 400, 1024, 3136, qui ſont encore tels que ſi au Plan-plan de deux quelconques on ajoûte le Plan-plan ſous le troiſiéme & le même quarré donné, il vient trois nombres quarrez.

QUESTION V.

Trouver trois nombres quarrez en proportion arithmetique.

SI l'on met xx, yy, zz, pour les trois nombres quarrez qu'on cherche, on leur donnera la proportion arithmetique, en égalant la ſomme des deux extrêmes au double du moyen, par cette Equation,

$xx+zz$

$xx+zz \propto 2yy$, dans laquelle on trouvera $z \propto \sqrt{2yy-xx}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $2yy-xx$, ce qui ſera facile, parce que la ſomme 1 des unitez eſt un nombre quarré. Suppoſez donc $x \propto \omega - y$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $yy+2y\omega-\omega\omega$, pour le côté duquel prenant $y \ldots \frac{a\omega}{b}$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $yy+2y\omega+\omega\omega \propto yy-\frac{2a\omega y}{b}+\frac{aa\omega\omega}{bb}$. l'on trouvera en entiers $y \propto aa+bb$, & $\omega \propto 2ab+2bb$, & par conſéquent $x \propto aa \ldots 2ab \ldots bb$, & $z \propto aa+2ab-bb$, & les trois quarrez qu'on cherche, ſeront tels dont

$$a^4-4a^3b+2aabb+4ab^3+b^4.$$
$$a^4+2aabb+b^4.$$
$$a^4+4a^3b+2aabb-4ab^3+b^4$$

le premier eſt le quarré de la difference des deux côtez d'un triangle rectangle, & le troiſiéme eſt le quarré de la ſomme des mêmes côtez : pour le ſecond il eſt égal au quarré de l'hypotenuſe du même triangle.

Si l'on ſuppoſe $a \propto 2$, & $b \propto 1$, les trois quarrez qu'on cherche, ſeront 1, 25, 49, dont les côtez ſont 1, 5, 7 : le premier 1 étant égal à la difference des deux côtez de ce triangle rectangle 3, 4, 5, le troiſiéme 7 étant egal à la ſomme des mêmes côtez, & le ſecond 5 étant égal à l'hypotenuſe du même triangle.

Pour avoir une ſolution plus générale, ſuppoſez $x \propto \frac{a\omega}{b} \ldots y$, & $z \propto \frac{c\omega}{d} \ldots y$, & au lieu de l'Equation conſtitutive $xx+zz \propto 2yy$, vous aurez celle-ci, $\frac{aa\omega\omega}{bb}-\frac{2ay\omega}{b}+\frac{cc\omega\omega}{dd}-\frac{2cy\omega}{d}+2yy \propto 2yy$, dans laquelle vous trouverez en entiers, $\omega \propto 2bbcd+2abdd$, & $y \propto aadd+bbcc$, & au

au lieu de $x \propto \frac{aw}{b} \ldots y$, & de $z \propto \frac{cw}{d} \ldots y$, on aura $x \propto 2abcd+aadd-bbcc$, & $z \propto 2abcd+bbcd-aadd$, & les trois quarrez qu'on cherche, ſeront tels,

$$a^4d^4+4a^3bcd^3+2aabbccdd-4ab^3c^3d+b^4c^4.$$
$$a^4d^4+2aabbccdd+b^4c^4.$$
$$a^4d^4-4a^3bcd^3+2aabbccdd+4ab^3c^3d+b^4c^4.$$

Si l'on ſuppoſe $a \propto 1$, $b \propto 2$, $c \propto 2$, & $d \propto 2$, les trois quarrez qu'on cherche ſeront en moindres termes de cette grandeur 1, 25, 49, dont les côtez ſont 1, 5, 7.

QUESTION VI.

Trouver trois nombres quarrez en proportion harmonique.

SI l'on met xx, yy, zz, pour les trois nombres quarrez qu'on cherche, on leur donnera la proportion harmonique par cette analogie, xx, $zz :: xx-yy$, $yy-zz$: de laquelle on tirera cette Equation, $xxyy-xxzz \propto xxzz-yyzz$, dans laquelle on trouvera $\frac{xy}{z} \propto \sqrt{2xx-yy}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $2xx-yy$, ce qui eſt facile, parce que la ſomme 1 des unitez eſt un nombre quarré. Suppoſez donc $x \propto a+y$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $yy+4ay+2aa$, pour le côté duquel prenant $y \ldots b$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $yy+4ay+2aa \propto yy-2by+bb$, on trouvera $y \propto \frac{bb-2aa}{4a+2b}$, & par conſéquent $x \propto \frac{bb+2ab+2aa}{4a+2b}$, & $z \propto \frac{b^4+2ab^3-4a^3b-4a^4}{2b^3+12abb+20aab+8a^3}$, & les côtez des trois quarrez qu'on cherche, ſeront en entiers de cette grandeur,

$$b^4+6ab^3+12aabb+12a^3b+4a^4.$$
$$b^4+4ab^3-8a^3b-4a^4.$$
$$b^4+2ab^3-4a^3b-4a^4.$$

Si

Si l'on ſuppoſe $a \gtrdot 1$, & $b \gtrdot 2$, les trois quarrez qu'on cherche, ſeront en moindres termes de cette grandeur 1225, 49, 25, dont les côtez ſont 35, 7, 5.

On peut reſoudre autrement cette Queſtion ſans qu'il ſoit beſoin d'une plus grande détermination, que celle qui arrive dans la ſolution précedente, à cauſe des termes de differente affection: ſçavoir en cherchant premierement trois nombres en proportion harmonique, pour les rendre enſuite quarrez, comme vous allez voir.

Si l'on met x, y, z, pour les trois nombres qu'on cherche, on leur donnera la proportion harmonique, par cette analogie, $x, z :: x-y, y-z$, dans laquelle on trouvera $z \gtrdot \frac{xy}{2x-y}$, & l'on aura en entiers ces trois nombres en proportion harmonique $2xx-xy, 2xy-yy, xy$, que l'on rendra quarrez en cette ſorte.

Egalez le premier nombre $2xx-xy$ au quarré $\frac{aaxx}{bb}$, pour avoir en entiers, $x \gtrdot bb$, & $y \gtrdot 2bb-aa$, & le premier nombre $2xx-xy$ ſe changera en ce quarré $aabb$, dont le côté eſt ab, & au lieu des deux derniers $2xy-yy$, xy, on aura ces deux autres à égaler au quarré,

$$2aabb-a^4.$$
$$2b^4-aabb.$$

Si l'on diviſe le premier $2aabb-a^4$ par le quarré aa, & le ſecond $2b^4-aabb$ par le quarré bb, on aura en leur place cette ſeule Puiſſance à égaler au quarré, $2bb-aa$, ce qui eſt facile, parce que la ſomme 1 des unitez eſt un nombre quarré. Suppoſez donc $b \gtrdot \omega+a$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $aa+4a\omega+2\omega\omega$, pour le côté duquel prenant $a \ldots \frac{c\omega}{d}$, l'on trouvera en entiers $\omega \gtrdot 4dd+2cd$, & $a \gtrdot cc-2dd$, & par conſéquent $b \gtrdot cc+2cd+2dd$, $x \gtrdot c^4+4c^3d+8ccdd+8cd^3+$

$+8cd^3+4d^4$, & $y \propto c^4+8c^3d+20ccdd+16cd^3+4d^4$. Ainſi les côtez des trois quarrez qu'on cherche, ſeront tels,

$$c^4+4c^3d+8ccdd+8cd^3+4d^4.$$
$$c^4+8c^3d+20ccdd+16cd^3+4d^4.$$
$$c^8+12c^7d+60c^6dd+168c^5d^3+152c^4d^4+336c^3d^5+240ccd^6+96cd^7+16d^8$$

$$c^4-4ccdd+4d^4$$

dont les côtez ſont

$$cc+2cd+2dd.$$
$$cc+4cd+2dd.$$
$$c^4+6c^3d+12ccdd+12cd^3+4d^4$$

$$cc...2dd$$

Si l'on ſuppoſe $c \propto 1$, & $d \propto 1$, les trois quarrez qu'on cherche, ſe trouveront les mêmes qu'auparavant: mais ſi l'on ſuppoſe $c \propto 3$, & $d \propto 2$, les trois quarré-quarrez qu'on cherche, ſeront tels, 841, 1681, 1413721, dont les côtez ſont 29, 41, 1189.

Ou bien égalez le ſecond nombre $2xy-yy$, au quarré $\frac{aayy}{bb}$, pour avoir en entiers $x \propto aa+bb$, & $y \propto 2bb$, & les deux autres nombres ſe changeront en ces deux, qu'il faut égaler au quarré,

$$2a^4+2aabb.$$
$$2b^4+2aabb.$$

Diviſez le premier $2a^4+2aabb$ par le quarré aa, & le ſecond $2b^4+2aabb$ par le quarré bb, pour avoir en leur place cette ſeule Puiſſance à égaler au quarré, $2aa+2bb$. Pour cette fin ſuppoſez $b \propto \omega-a$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $4aa-4a\omega+2\omega\omega$, pour le côté duquel prenant $2a+\frac{r\omega}{d}$, on trouvera en entiers $a \propto 2dd-cc$, & $\omega \propto 4dd+4cd$, & par conſéquent $b \propto cc+4cd+2dd$, $x \propto 2c^4+8c^3d+16ccdd+16cd^3+8d^4$, $y \propto 2c^4+16c^3d+40ccdd+32cd^3+8d^4$, &c.

Si

Si l'on ſuppoſe $c \gtrless 1$, & $d \gtrless 1$, les trois quarrez qu'on cherche, ſe trouveront de cette grandeur 25, 49, 1225, dont les côtez ſont 5, 7, 35, comme dans la premiere ſolution.

Ou bien encore égalez le troiſiéme nombre xy, au quarré $\frac{aaxx}{bb}$, & vous trouverez en entiers $x \gtrless bb$, & $y \gtrless aa$, & les deux premiers nombres ſe changeront en ces deux autres,

$$2b^4 - aabb.$$
$$2aabb - a^4.$$

que l'on rendra quarrez, en diviſant le premier par le quarré bb, & le ſecond par le quarré aa, pour avoir en leur place cette ſeule Puiſſance à égaler au quarré, $2bb - aa$. Pour cette fin, ſuppoſez $b \gtrless \omega - a$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $aa - 4\omega + 2\omega\omega$, pour le côté duquel prenant $a + \frac{c\omega}{d}$, l'on trouvera en entiers $a \gtrless 2dd - cc$, & $\omega \gtrless 4cd + 4dd$, & par conſéquent $b \gtrless cc + 4cd + 2dd$, $x \gtrless c^4 + 4c^3d + 8ccdd + 8cd^3 + 4d^4$, $y \gtrless c^4 - 4ccdd + 4d^4$, &c.

Si l'on ſuppoſe $c \gtrless 7$, & $d \gtrless 5$, les trois quarrez qu'on cherche, ſeront de cette grandeur, 163143 2881, 57121, 28561, dont les côtez ſont 40391, 239, 169.

QUESTION VII.

Trouver trois nombres quarrez, tels que la ſomme de deux quelconques ſoit un nombre quarré.

FOrmez de ax & de by, ce triangle rectangle,
$$2abxy, \quad aaxx - bbyy, \quad aaxx + bbyy.$$
& reciproquement de bx & de ay, ce triangle rectangle,
$$2abxy, \quad aayy - bbxx, \quad aayy + bbxx.$$
& mettez $2abxy$, qui eſt la hauteur commune à ces deux triangles, & leurs baſes $aaxx - bbyy$, $aayy - bbxx$, pour

pour les côtez des trois quarrez qu'on cherche, leſquels par conſéquent ſeront tels,

$$4aabbxxyy.$$
$$a^4x^4 - 2aabbxxyy + b^4x^4.$$
$$a^4y^4 - 2aabbxxyy + b^4x^4.$$

car ainſi le premier étant ajoûté à chacun des deux autres fera un nombre quarré par la nature du triangle rectangle: & il ne reſte plus qu'à égaler au quarré la ſomme $a^4x^4 + b^4x^4 - 4aabbxxyy + a^4y^4 + b^4y^4$, de ces deux autres. Pour cette fin ſuppoſez $x \propto z - \frac{ay}{b}$, & vous aurez en entiers cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $a^8y^4 - 2a^4b^4y^4 + b^8y^4 + 4a^3b^5zy^3 - 4a^7bzy^3 + 6a^6bbyyzz + 2aab^6yyzz - 4a^5b^3z^3y - 4ab^7z^3y + a^4b^4z^4 + b^8z^4$, pour le côté duquel prenant $a^4y - b^4y - 3a^3bzy + \frac{a^6bbzz + aab^6zz}{a^4 - b^4}$, l'on trouvera en entiers $y \propto b^9 - a^4b^5 - 3a^8b$, & $z \propto 4ab^8 - 4a^9$, & par conſéquent $x \propto 3ab^8 + 2a^5b^4 - a^9$, & les côtez des trois quarrez qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

$$6aab^{18} - 8a^6b^{14} - 28a^{10}b^{10} - 8a^{14}b^6 + 6a^{18}bb.$$
$$a^{20} - 13a^{16}b^4 - 14a^{12}b^8 + 14a^8b^{12} + 13a^4b^{16} - b^{20}.$$
$$8a^{18}bb + 16a^{14}b^6 - 16a^6b^{14} - 8aab^{18}.$$

Si l'on ſuppoſe $a \propto 1$, & $b \propto 2$, ou $a \propto 2$, & $b \propto 1$; les trois quarrez qu'on cherche, ſeront tels,

$$1995529167424.$$
$$2046473025.$$
$$5561295897600.$$

dont les côtez ſont 1412632, 143055, 2358240.

QUESTION

QUESTION VIII.

Trouver trois nombres cubiques, dont la ſomme ſoit un cube.

Premiere reſolution.

FOrmez de ce Binome a^3+b^3, le cube ſuivant, $a^9+3a^6b^3+3a^3b^6+b^9$, & mettez a^9, $3a^6b^3+3a^3b^6$, b^9, pour les trois cubes qu'on cherche, car ainſi leur ſomme $a^9+3a^6b^3+3a^3b^6+b^9$, ſera un cube, dont le côté eſt le Binome a^3+b^3, & il n'y aura plus qu'à égaler au cube le moyen $3a^6b^3+3a^3b^6$, qui n'eſt pas cubique. Diviſez-le par le cube a^3b^3, pour avoir en moindres termes cette autre Puiſſance à égaler au cube, $3a^3+3b^3$, qui a ces deux nombres produiſans, $3aa-3ab+3bb$, $a+b$, dont le premier étant égalé au quarré du ſecond, par cette Equation, $3aa-3ab+3bb \propto aa+2ab+bb$, l'on trouvera $a \propto 2$, & $b \propto 1$, & les trois cubes qu'on cherche, ſeront tels, 512, 216, 1, dont les côtez ſont 8, 6, 1, & dont la ſomme 729 a ſa Racine cubique 9.

Seconde reſolution.

Si vous voulez une reſolution indéfinie, mettez $x+y$, $x-y$, $x-\frac{ay}{b}$, pour les côtez des trois cubes qu'on cherche, leſquels par conſéquent ſeront tels,

$$x^3+3xxy+3xyy+y^3.$$
$$x^3-3xxy+3xyy-y^3.$$
$$x^3-\frac{3axxy}{b}+\frac{3aaxyy}{bb}-\frac{a^3y^3}{b^3};$$

dont la ſomme $3x^3-\frac{3axxy}{b}+6xyy+\frac{3aaxyy}{bb}-\frac{a^3y^3}{b^3}$ étant multipliée par le cube b^3, l'on aura en entiers cette Puiſſance à égaler au cube, $3b^3x^3+6b^3xyy-3abbxxy+3aabxyy-a^3y^3$, pour le côté duquel prenant

$-ay+bx+\frac{2b^3x}{aa}$, on trouvera en entiers $x \propto 6a^5b+6a^3b^3$, & $y \propto 3a^4bb+6aab^4+4b^6-a^6$, & les côtez des trois cubes qu'on cherche, ſeront tels,

$$6a^5b+3a^4bb+6a^3b^3+6aab^4+4b^6-a^6.$$
$$6a^5b-3a^4bb+6a^3b^3-6aab^4-4b^6+a^6.$$
$$3a^5b-4ab^5+\frac{a^7}{b}.$$

Si l'on ſuppoſe $a \propto 2$, & $b \propto 1$, les trois cubes qu'on cherche, ſeront en moindres termes de cette grandeur 9261, 6859, 5832, dont les côtez ſont 21, 19, 18.

Troiſiéme reſolution.

Ou bien mettez $x+\frac{ay}{b}$, $x-\frac{ay}{b}$, $x-y$, ou $bx+ay$, $bx-ay$, $bx-by$, pour les côtez des trois cubes qu'on cherche, leſquels par conſéquent ſeront tels,

$$b^3x^3+3abbxxy+3aabxyy+a^3y^3.$$
$$b^3x^3-3abbxxy+3aabxyy-a^3y^3.$$
$$b^3x^3-3b^3xxy+3b^3xyy-b^3y^3.$$

dont la ſomme $3b^3x^3-3b^3xxy+6aabxyy+3b^3xyy-b^3y^3$, doit être égalée à un cube pour le côté duquel on prendra $-by+bx+\frac{2aax}{b}$, & alors on trouvera en entiers $x \propto 6a^4bb+6aab^4$, & $y \propto 4a^6+6a^4bb+3aab^4-b^6$, & les côtez des trois cubes qn'on cherche, ſeront de cette grandeur,

$$6a^4bb+6aab^4+3a^3b^3+6a^5b+\frac{4a^7}{b}-ab^5.$$

$$6a^4bb+6aab^4-3a^3b^3-6a^5b-\frac{4a^7}{b}+ab^5.$$
$$3aab^4-4a^6+b^6.$$

Si l'on ſuppoſe $a \propto 1$, & $b \propto 2$, les trois cubes qu'on cherche, ſeront en moindres termes, de cette grandeur 9261, 6859, 5832, dont les côtez ſont 21, 19, 18, comme auparavant, & dont la ſomme 21952, a ſa Racine cubique 28.

Quatriéme

Quatriéme reſolution.

Ou bien mettez $x+\frac{ay}{b}$, $x-\frac{ay}{b}$, y, ou $bx+ay$, $bx-ay$, by, pour les côtez des trois cubes qu'on cherche, leſquels par conſéquent ſeront tels,

$$b^3x^3+3abbxxy+3aabxyy+a^3y^3.$$
$$b^3x^3-3abbxxy+3aabxyy-a^3y^3.$$
$$b^3y^3.$$

dont la ſomme $2b^3x^3+6aabxyy+b^3y^3$ deviendra cubique, en l'égalant au cube $b^3y^3+6aabxyy+\frac{12a^4bxxy}{bb}+\frac{8a^6x^3}{b^3}$, dont le côté eſt $by+\frac{2aax}{b}$, on trouvera en entiers $x \propto 6a^4bb$, & $y \propto b^6-4a^6$, & alors les côtez des trois cubes qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

$$6a^4bb+ab^5-\frac{4a^7}{b}.$$
$$6a^4bb-ab^5+\frac{4a^7}{b}.$$
$$b^6-4a^6.$$

Si l'on ſuppoſe $a \propto 2$, & $b \propto 3$, les trois cubes qu'on cherche, ſeront tels,

$$442867\,16872.$$
$$445953\,4136.$$
$$285724\,3059.$$

dont les côtez ſont 3538, 1646, 1419, & dont la ſomme 51603494067, a ſa Racine cubique 3723.

Cinquiéme reſolution.

Ou bien mettez $a-x$, $\frac{cx}{d}-b$, b, pour les côtez des trois cubes qu'on cherche, leſquels par conſéquent ſeront tels,

$$a^3-3aax+3axx-x^3.$$
$$\frac{c^3x^3}{a^3}-\frac{3bccxx}{dd}+\frac{3bbcx}{d}-b^3.$$
$$b^3$$

dont la ſomme $a^3 - 3aax + \frac{3bbcx}{d} + 3axx - \frac{3bccxx}{dd} + \frac{c^3x^3}{d^3} - x^3$, ſera égalée au cube a^3, afin que le reſte de l'Equation ſe puiſſe abaiſſer en le diviſant par x : mais afin que la valeur de x ſe trouve rationnelle, il faut que l'Equation qui reſte, ſçavoir $-3aa + 3ax - \frac{3bccx}{dd} + \frac{3bbc}{d} + \frac{c^3xx}{d^3} - xx \gtrless 0$, ſoit encore diviſible par x, ce qui ſeroit poſſible, ſi les deux termes $3aa$, $\frac{3bbc}{dc}$, qui ſont de contraire affection, étoient évanoüis, il les faut donc faire évanouïr, par cette Equation, $\frac{3bbc}{d} - 3aa \gtrless 0$, dans laquelle on trouvera en entiers $d \gtrless bb$, & $c \gtrless aa$, & l'Equation précedente, $-3aa + 3ax - \frac{3bccx}{dd} + \frac{3bbc}{d} + \frac{c^3xx}{d^3} - xx \gtrless 0$, ſe changera en celle-ci, $3ax - \frac{3a^4x}{b^3} + \frac{a^6xx}{b^6} - xx \gtrless 0$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless \frac{3ab^3}{a^3+b^3}$, & les trois cubes qu'on cherche, ſeront en entiers de cette grandeur,

$$a^{12} - 6a^9b^3 + 12a^6b^6 - 8a^3b^9.$$
$$8a^9b^3 - 12a^6b^6 + 6a^3b^9 - b^{12}.$$
$$b^{12} + 3a^3b^9 + 3a^6b^6 + a^9b^3.$$

dont la ſomme $a^{12} + 3a^9b^3 + 3a^6b^6 + a^3b^9$, a ſa Racine cubique $a^4 + ab^3$, & dont les côtez ſont $a^4 - 2ab^3$, $2a^3b - b^4$, $a^3b + b^4$.

Si l'on ſuppoſe $a \gtrless 2$, & $b \gtrless 1$, les trois cubes qu'on cherche, ſeront en moindres termes, de cette grandeur 64, 125, 27, dont les côtez ſont 4, 5, 3, & dont la ſomme 216 a ſa Racine cubique 6.

Ou bien encore mettez a, b, $\frac{aax}{bb} - b$, pour les côtez

côtez des trois cubes qu'on cherche, leſquels par conſéquent ſeront tels,

$$a^3.$$
$$b^3.$$
$$\frac{a^6x^3}{b^6} - \frac{3a^4xx}{b^6} - \frac{3a^4xx}{b^3} + 3aax - b^3.$$

dont la ſomme $a^3 + \frac{a^6x^3}{b^6} - \frac{3a^4xx}{b^3} + 3aaxx$, étant égalée au cube $a^3 + 3aax + 3axx + x^3$, dont le côté eſt $a + x$, l'on trouvera $x \propto \frac{3a^3b^3}{a^3 - b^3}$, & les côtez des trois cubes qu'on cherche, ſeront en entiers, de cette grandeur, $a^4 - ab^3$, $a^3b - b^4$, $2a^3b + b^4$, & les cubes ſeront tels,

$$a^{12} - 3a^9b^3 + 3a^6b^6 - a^3b^9.$$
$$a^9b^3 - 3a^6b^6 + 3a^3b^9 - b^{12}.$$
$$8a^9b^3 + 12a^6b^6 + 6a^3b^9 + b^{12}.$$

dont la ſomme $a^{12} + 6a^9b^3 + 12a^6b^6 + 8a^3b^9$, a ſa Racine cubique $a^4 + 2ab^3$.

Si l'on ſuppoſe $a \propto 2$, & $b \propto 1$, les trois cubes qu'on cherche, ſeront tels, 2744, 343, 4913, dont les côtez ſont 14, 7, 17, & dont la ſomme 8000 a ſa Racine cubique 20.

QUESTION IX.

Trouver trois nombres en proportion arithmetique, tels que la ſomme de leurs cubes ſoit un cube.

AYant trouvé par la cinquiéme reſolution du Problême précedent, ces trois nombres,

$$b^4 + a^3b.$$
$$a^4 - 2ab^3.$$
$$2a^3b - b^4.$$

qui ſont tels que la ſomme de leurs cubes eſt un cube, on leur donnera la proportion arithmetique en égalant

la ſomme des deux extrêmes au double du moyen, par cette Equation, $3a^3b \gtrless 2a^4 - 4ab^3$, ou $2a^3 - 3aab - 4b^3 \gtrless 0$, laquelle étant diviſée par $2aa+ab+2bb$, donne celle-ci, $a - 2b \gtrless 0$, dans laquelle on trouvera $a \gtrless 2$, & $b \gtrless 1$, & les trois nombres qu'on cherche, ſeront 3, 4, 5.

Cette Queſtion ſe peut reſoudre immediatement, & ſans avoir recours à la précedente, ſçavoir en mettant a, $a+b$, $a+2b$, pour les trois nombres qu'on cherche, & alors leurs cubes ſeront tels,

$$a^3.$$
$$a^3+3aab+3abb+b^3.$$
$$a^3+6aab+12abb+8b^3.$$

dont la ſomme eſt $3a^3+9aab+15abb+9b^3$, qui a ces deux nombres produiſans, $aa+2ab+3bb$, $3a+3b$, dont le premier $aa+2ab+3bb$ étant égalé au quarré $9aa+18ab+9bb$, du ſecond $3a+3b$, qui eſt égal à la ſomme des trois nombres, on trouvera $b \gtrless -2a$: c'eſt pourquoi on ſuppoſera $b \gtrless z-2a$, & alors la ſomme précedente $3a^3+9aab+15abb+9b^3$, ſe changera en celle-ci, $9z^3 - 39azz + 57aaz - 27a^3$, qu'il faut égaler au cube, pour le côté duquel prenant $-3a+\frac{1}{3}z$, on trouvera en entiers $a \gtrless 149$, & $z \gtrless 405$, & par conſéquent $b \gtrless 407$, & les trois nombres qu'on cherche, ſeront 149, 256, 363, & leurs cubes ſeront tels,

3307949.
16777216.
47832147.

679173 12.

dont la ſomme 679173 12 a ſa Racine cubique 1 8.

Ces mêmes nombres ſe peuvent trouver au moyen des trois premiers trouvez 3, 4, 5, ſçavoir en mettant $a+3$, $a+4$, $a+5$, pour les trois nombres qu'on cherche, & alors leurs cubes ſeront tels,

a^3+

$$a^3+9aa+27a+27$$
$$a^3+12aa+48a+64$$
$$a^3+15aa+75a+125$$

$$3a^3+36aa+150a+216$$

dont la ſomme $3a^3+36aa+150a+216$, a ces deux nombres produiſans $aa+8a+18$, $3a+12$, dont le premier $aa+8a+18$ étant égalé au quarré $9aa+72a+144$ du ſecond $3a+12$, l'on trouvera $a \propto -\frac{7}{3}$. C'eſt pourquoi l'on ſuppoſera $a \propto z-\frac{1}{3}$, & au lieu de la ſomme précedente $3a^3+36aa+150a+216$, on aura celle-ci, à égaler au cube, $3z^3+\frac{9}{3}zz+\frac{11}{4}z+\frac{27}{8}$, pour le côté duquel prenant $\frac{1}{3}+\frac{11}{9}z$, l'on trouvera $z \propto \frac{425}{1144}$, & par conſéquent $a \propto -\frac{171}{1072}$, & les trois nombres qu'on cherche, ſe trouveront les mêmes qu'auparavant.

Ou bien ayant ſuppoſé $a \propto z-\frac{7}{3}$, les deux nombres produiſans $aa+8a+18$, $3a+12$, ſe changeront en ces deux autres, $zz+z+\frac{9}{4}$, $3z+\frac{1}{3}$, dont le premier $zz+z+\frac{9}{4}$ étant égalé au quarré $9zz+9z+\frac{9}{4}$ du ſecond $3z+\frac{1}{3}$, on trouvera $z \propto -1$, & par conſéquent $a \propto -\frac{9}{3}$. C'eſt pourquoi il faudra encore ſuppoſer $a \propto \omega-\frac{9}{3}$, & alors la ſomme précedente $3a^3+36aa+150a+216$, ſe changera en celle-ci, $3\omega^3-\frac{9}{3}\omega\omega+\frac{33}{4}\omega-\frac{27}{8}$, laquelle étant égalée au cube $-\frac{27}{8}+\frac{33}{4}\omega-\frac{121}{18}\omega\omega+\frac{1331}{729}\omega^3$, dont le côté eſt $-\frac{1}{3}+\frac{11}{9}\omega$, l'on trouvera $\omega \propto -\frac{401}{1144}$, & par conſéquent $a \propto -\frac{6934}{1072}$, & les trois nombres qu'on cherche, ſe trouveront les mêmes qu'auparavant.

Ou bien égalez le premier nombre produiſant $aa+8a+18$, au quarré $aa-2ab+bb$, dont le côté eſt $a...b$, & l'on trouvera $a \propto \frac{bb-18}{2b+8}$, & au lieu du côté $a...b$. on aura celui-ci, $\frac{bb+8b+18}{2+8}$, qu'il faut égaler au ſecond nombre produiſant $3a+12$, ou $\frac{3bb+24b+42}{2b+3}$, pour

avoir $b \propto -2$, & par conſéquent $a \propto -\frac{7}{2}$, comme auparavant.

Ou bien encore égalez le premier nombre produiſant $aa+8a+18$, au quarré $aa+2ab+bb$, dont le côté eſt $a+b$, pour avoir $a \propto \frac{bb-18}{8-2b}$, & par conſéquent $a+b \propto \frac{8b-bb-18}{8-2b}$, qu'il faut égaler au ſecond nombre produiſant $3a+12$, ou $\frac{3bb-24b+42}{8-2b}$, pour avoir $b \propto 5$, ou $b \propto 3$, & par conſéquent $a \propto -\frac{7}{2}$, ou $a \propto -\frac{1}{2}$, comme auparavant.

QUESTION X.

Trouver en nombres un triangle rectangle, tel que la ſomme des cubes de ſes trois côtez ſoit un cube.

AYant trouvé par la cinquiéme reſolution de la Queſtion précedente ces trois nombres,

$$b^4+a^3b.$$
$$a^4-2ab^3$$
$$2a^3b-b^4.$$

on les pourra prendre pour les côtez du triangle rectangle qu'on cherche, parce que la ſomme de leurs cubes eſt un cube. C'eſt pourquoi il n'y aura plus, en prenant le troiſiéme côté $2a^3b-b^4$, pour l'hypotenuſe, qu'à égaler la ſomme des quarrez des deux premiers au quarré du troiſiéme, par cette Equation, $4a^6bb-4a^3b^5+b^8 \propto b^8+2a^3b^5+a^6bb+a^8-4a^5b^3+4aab^6$, ou $4b^6+6ab^5-4a^3b^3-3a^4bb+a^6 \propto 0$, laquelle étant diviſée par $2b^3-a^3$, on a cette autre Equation, $2b^3+3abb-a^3 \propto 0$, qui ſe peut encore diviſer par $bb+2ab+aa$, & vient cette derniere Equation, $2b-a \propto 0$, dans laquelle on trouvera $a \propto 2$, & $b \propto 1$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſera 3, 4, 5.

Cette

Cette Queſtion ſe peut reſoudre immediatement, & ſans avoir recours à la précedente, ſçavoir en formant des deux quantitez indéterminées a, b, ce triangle rectangle, $aa+bb$, $aa-bb$, $2ab$, & alors les cubes des trois côtez ſeront tels,

$$a^6+3a^4bb+3aab^4+b^6.$$
$$a^6-3a^4bb+3aab^4-b^6.$$
$$8a^3b^3.$$

dont la ſomme $2a^6+6aab^4+8a^3b^3$ a ces deux nombres produiſans, $a^4+2a^3b+aabb$, $2aa-4ab+6bb$, dont le ſecond $2aa-4ab+6bb$ étant égalé à la Racine quarrée $aa+bb$ du premier $a^4+2a^3b+aabb$, par cette Equation, $2aa-4ab+6bb \propto aa+bb$, l'on trouvera $a \propto 2b$, ou $a \propto 3b$, & par conſéquent $a \propto 2$, & $b \propto 1$, ou $a \propto 3$, & $b \propto 1$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſera 3, 4, 5, ou 6, 8, 10.

Ou bien parce que la ſomme des cubes des trois côtez d'un triangle rectangle eſt diviſible par la ſomme des trois mêmes côtez, & même par la moitié de cette ſomme, l'on connoîtra que la ſomme précedente, $2a^6+6aab^4+8a^3b^3$, a ces deux nombres produiſans, $aa+ab$, $2a^4-2a^3b+2aabb+6ab^3$, c'eſt pourquoi on égalera le ſecond au quarré du premier, par cette Equation, $2a^4-2a^3b+2aabb+6ab^3 \propto a^4+2a^3b+aabb$, qui ſe reduit par l'antitheſe à celle ci, $a^4-4a^3b+aabb+6ab^3 \propto 0$, laquelle étant diviſée par $aa+ab$, on a celle ci, $aa-5ab+6bb \propto 0$, dans laquelle on trouvera $a \propto 2b$, ou $a \propto 3b$, comme auparavant.

QUES

QUESTION XI.

Trouver en nombres, deux triangles rectangles de differente eſpece, où les differences des contours, des hypotenuſes, des plus grands des deux autres côtez, & des plus petits, ſoient des nombres quarrez.

FOrmez de y & de $x+y$; & de y & de $x-y$, ces deux triangles rectangles,

$$xx+2xy+2yy,\ xx+2xy,\ 2xy+2yy.$$
$$xx-2xy+2yy,\ xx-2xy,\ 2xy-2yy.$$

$4xy \qquad 4xy \qquad 4yy$

La difference de leurs contours eſt $8xy+4yy$, qu'il faut égaler au quarré : la difference des plus petits côtez eſt $4yy$, qui eſt un nombre quarré : la difference des plus grands côtez eſt $4xy$, qu'il faut auſſi égaler au quarré : & la difference des hypotenuſes eſt auſſi $4xy$. Ainſi nous avons ſeulement ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$8xy+4yy.$$
$$4xy.$$

Egalez la premiere $8xy+4yy$, au quarré $\frac{4aayy}{bb}$, pour avoir en entiers, $x \propto aa-bb$, & $y \propto 2bb$, & la ſeconde $4xy$, ſe changera en celle-ci, $8aabb-8b^4$, ou $2aa-2bb$, que l'on rendra quarrée en ſuppoſant $a \propto z+b$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $2zz+4bz$, pour le côté duquel prenant $\frac{ez}{d}$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $2zz+4bz \propto \frac{eezz}{dd}$, l'on trouvera en entiers, $b \propto cc-2dd$, & $z \propto 4dd$, & par conſéquent $a \propto cc+2dd$, $x \propto 8ccdd$, & $y \propto 2c^4-8ccdd+8d^4$, & les deux triangles rectangles qu'on cherche, ſeront tels,

$2c^8-$

premier triangle.
$$2c^8-8c^6dd+32c^4d^4-32ccd^6+32d^8$$
$$-8c^6dd+16c^4d^4-32ccd^6$$
$$2c^8-8c^6dd+16c^4d^4-32ccd^6+32d^8$$

second triangle.
$$2c^8-24c^6dd+96c^4d^4-96ccd^6+32d^8$$
$$8c^6dd-48c^4d^4+32ccd^6$$
$$-2c^8+24c^6dd-80c^4d^4+96ccd^6-32d^8$$

dont les nombres generateurs ſont tels,

$c^4-4ccdd+4d^4$, c^4+4d^4

$c^4-4ccdd+4d^4$, $-c^4+8ccdd-4d^4$.

Si l'on ſuppoſe $c \gtrless 1$, & $d \gtrless 1$, les deux triangles rectangles qu'on cherche, ſeront tels,

26, 24, 10.

10, 8, 6.

& ſi l'on ſuppoſe $c \gtrless 3$, & $d \gtrless 1$, les deux triangles rectangles qu'on cherche, ſeront tels,

21026, 21024, 290.

20450, 20448, 286.

LEMME I.

Trouver en nombres un triangle rectangle, tel que la difference du quadruple de ſon aire & de la difference des quarrez des deux côtez, ſoit un nombre quarré.

SI l'on met $xx-yy$, $2xy$, $xx+yy$, pour le triangle rectangle qu'on cherche, & que l'on prenne $2xy$ pour le plus grand des deux côtez, la difference de leurs quarrez ſera $6xxyy-x^4-y^4$, laquelle étant ôtée du quadruple de l'aire, ou du double du produit ſous les deux côtez, qui eſt $4x^3y-4xy^3$, il reſtera $x^4+4x^3y-6xxyy-4xy^3+y^4$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $xx-2xy+yy$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $x^4+4x^3y-6xxyy-4xy^3+y^4 \gtrless x^4-4x^3y+6xxyy-4xy^3+y^4$, l'on trouvera

$x \gtrless 3$,

$x \gtrless 3$, & $y \gtrless 2$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſera 5, 12, 13.

On trouvera le même triangle en égalant le Puiſſance précedente $x^4+4x^3y-6xxyy-4xy^3+y^4$ au quarré $x^4+4x^3y-6xxyy-20xy^3+25y^4$, dont le côté eſt $xx+2xy-5yy$: mais en l'égalant au quarré $x^4+4x^3y+6xxyy+4xy^3+y^4$, dont le côté eſt $xx+2xy+yy$, on trouvera $x \gtrless -3$, & $y \gtrless 2$: c'eſt pourquoi on doit ſuppoſer $x \gtrless z-3$, & à cauſe de $y \gtrless 2$, la Puiſſance précedente $x^4+4x^3y-6xxyy-4xy^3+y^4$, ſe changera en celle-ci, $z^4-20z^3+102zz-148z+1$, laquelle étant égalée au quarré $z^4-20z^3+98z+20z+1$, dont le côté eſt $zz-10z-1$, on trouvera $z \gtrless 42$, & au lieu de $x \gtrless z-3$, on aura $x \gtrless 39$, & à cauſe de $y \gtrless 2$, le triangle rectangle qu'on cherche, ſera 1517, 156, 1525.

Il eſt évident que le premier triangle trouvé 5, 12, 13, ſatisfait à la Queſtion, car le quadruple de ſon aire eſt 120, d'où ôtant la difference 119 des quarrez 25, 144, des deux côtez 5, 12, il reſte ce nombre quarré 1, dont le côté eſt 1. Il eſt évident auſſi que le ſecond triangle trouvé 1517, 156, 1525, ſatisfait à la Queſtion, car ſi le quadruple de ſon aire 473304 eſt ôté de la difference 2276953 des quarrez 2301289, 24336, des deux côtez 1517, 156, il reſte ce nombre quarré 1803649, dont le côté eſt 1343.

LEMME II.

Trouver en nombres un triangle rectangle, tel que la ſomme du quadruple de ſon aire & de la difference des quarrez des deux côtez, ſoit un nombre quarré.

SI l'on met comme auparavant, $xx-yy$, $2xy$, $xx+yy$, pour le triangle rectangle qu'on cherche, &

& qu'on prenne $xx-yy$ pour le plus grand des deux côtez, la difference de leurs quarrez ſera $x^4-6xxyy+y^4$, laquelle étant ajoûtée au quadruple de l'aire, qui eſt $4x^3y-4xy^3$, l'on aura cette ſomme à égaler au quarré, $x^4+4x^3y-6xxyy-4xy^3+y^4$, pour le côté duquel prenant $xx-2xy+yy$, ou bien $xx+2xy-5yy$, on trouvera $x \propto 3$, & $y \propto 2$: & comme ces valeurs ne ſe trouvent pas propres, on ſuppoſera $x \propto z+3$, & à cauſe de $y \propto 2$, la Puiſſance precedente, $x^4+4x^3y-6xxyy-4xy^3+y^4$, ſe changera en celle-ci, $z^4+20z^3+102zz+148z+1$, laquelle étant égalée au quarré $z^4-148z^3+5474zz+148z+1$, dont le côté eſt $1+74z-zz$, l'on trouvera $z \propto \frac{1300}{421}$, & par conſéquent $x \propto \frac{1469}{421}$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſera en entiers de cette grandeur,

2150905, 246792, 2165017.

qui ſatisfait aux conditions de la Queſtion: car le quadruple de ſon aire, 10616522935 20, étant ajoûté à la difference 4565466027761, des quarrez 60906291264, 4626396319005, des deux côtez 246792, 2150905, il vient ce nombre quarré, 5627138383212 81, dont le côté eſt 2372159.

QUESTION XII.

Trouver en nombres un triangle rectangle, où la difference des deux côtez, & l'hypotenuſe, ſoient des nombres quarrez.

AYant trouvé par le *Lem.* 1. ce triangle rectangle, 5, 12, 13, formez de ces deux côtez 5, 12, cet autre triangle rectangle 119, 120, 169, qui ſera celui qu'on cherche: car la difference 1 des deux côtez 119, 120, a ſa Racine quarrée 1, & l'hypotenuſe 169 a auſſi ſa Racine quarrée, qui eſt l'hypotenuſe du triangle rectangle generateur 5, 12, 13.

Ou

Ou bien ayant trouvé par le *Lem.* 1. cet autre triangle rectangle 1517, 156 1525, formez de ſes deux côtez 1517, 156, ce ſecond triangle rectangle, 2276953, 473304, 2325625, qui ſatisfont aux conditions de la Queſtion: car la difference 1803649 des deux côtez 2276953, 473304, a ſa Racine quarrée 1343, & l'hypotenuſe 2325625 a auſſi ſa Racine quarrée 1525, qui eſt l'hypotenuſe du triangle rectangle generateur 1517, 156, 1525.

Scolie.

Il eſt évident que par cette Queſtion, l'on *trouve deux nombres, dont la difference eſt un nombre quarré, & la ſomme de leurs quarrez un nombre quarré quarré*, ces deux nombres étant les deux côtez de l'un des deux triangles rectangles précedens: mais ces deux nombres ſe peuvent trouver immediatement en cette ſorte.

Si l'on met x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $x...y$, & cette autre Puiſſance à égaler au quarré-quarré, $xx+yy$.

Il faut premierement égaler au quarré la ſomme $xx+yy$, comme au quarré $yy-\frac{2bxy}{a}+\frac{bbxx}{aa}$, dont le côté eſt $y...\frac{bx}{a}$, pour avoir en entiers $x \propto 2ab$, & $y \propto bb...aa$, & au lieu du côté précedent $y...\frac{bx}{a}$, on aura celui-ci, $aa+bb$, qu'il faut encore égaler au quarré, comme au quarré, $aa-\frac{2abc}{d}+\frac{bbcc}{dd}$, dont le côté eſt $a...\frac{bc}{d}$, pour avoir en entiers $a \propto cc...dd$, & $b \propto 2cd$, & par conſéquent $x \propto 4c^3d...4cd^3$, & $y \propto c^4-6ccdd+d^4$, &

& au lieu de la difference $x...y$, on aura celle-ci à égaler au quarré, $c^4-4c^3d-6ccdd+4cd^3+d^4$, pour le côté duquel prenant $cc-2cd+dd$, l'on trouvera en entiers $c\mathrel{)}2$, & $d\mathrel{)}3$, & par conſéquent $a\mathrel{)}5$, $b\mathrel{)}12$, $x\mathrel{)}120$, & $y\mathrel{)}119$. Ainſi les deux nombres qu'on cherche, ſeront 119, 120, comme auparavant.

Si vous voulez deux autres nombres, ſuppoſez $a\mathrel{)}12$, & $b\mathrel{)}z-5$, pour avoir $x\mathrel{)}24z-120$, & $y\mathrel{)}zz-10z-119$, & au lieu de la difference $x...y$, on aura celle-ci, $zz-34z+1$, qu'il faut égaler au quarré, & au lieu de la ſomme $aa+bb$, on aura celle-ci, $zz-10z+169$. Ainſi on aura ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$zz-34z+1.$$
$$zz-10z+169.$$

Leur difference eſt $24z+168$, qui a ces deux nombres produiſans, $14, \frac{12}{7}z+12$. La moitié de leur difference eſt $1-\frac{6}{7}z$, dont le quarré $1-\frac{12}{7}z+\frac{36}{49}zz$ étant égalé à la plus petite Puiſſance $zz-34z+1$, on trouvera $z\mathrel{)}\frac{1568}{113}$, & par conſéquent $b\mathrel{)}\frac{1617}{113}$, $x\mathrel{)}\frac{38808}{113}$, & $y\mathrel{)}\frac{257761}{169}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront en entiers de cette grandeur, 473304, 2276953, comme auparavant.

On auroit pû ici égaler au quarré les deux Puiſſances précedentes $zz-34z+1$, $zz-10z+169$, en égalant leur produit $z^4-44z^3+510zz-5756z+169$, au quarré $z^4-44z^3+458zz+572z+169$, dont le côté eſt $zz-22z-13$, pour avoir $z\mathrel{)}\frac{1581}{113}$, comme auparavant.

QUES-

QUESTION XIII.

Trouver en nombres un triangle rectangle, où la ſomme des deux côtez, & l'hypotenuſe, ſoient des nombres quarrez.

AYant trouvé par le *Lem.* 2. ce triangle rectangle, 2150905, 246792, 2165017, formez de ſes deux côtez 2150905, 246792, cet autre triangle rectangle, 10616522935 20, 4565486027761, 4687298610289, qui ſera celui qu'on cherche: car la ſomme 5627138321281 de ſes deux côtez 10616522935 20, 4565860277 61, a ſa Racine quarrée 2372159, & l'hypotenuſe 4687298610289 a auſſi ſa Racine quarrée 2165017, qui eſt l'hypotenuſe du triangle rectangle generateur, 2150905, 246792, 2165017.

Cette Queſtion ſe peut reſoudre immediatement, & ſans avoir recours au *Lem.* 2. en cette ſorte.

Formez de x, & de $x+y$, ce triangle rectangle, $2xy+yy$, $2xx+2xy$, $2xx+2xy+yy$, & afin que la ſomme $2xx+4xy+yy$ des deux côtez devienne quarrée, on multipliera ce triangle rectangle par la même ſomme, & alors l'hypotenuſe $2xx+2xy+2yy$, ſe changera en celle-ci, $4x^4+12x^3y+12xxyy+6xy^3+y^4$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $2xx+3xy-yy$, on trouvera $x \propto 12$, & $y \propto -7$. C'eſt pourquoi on ſuppoſera $y \propto z-7$, & la Puiſſance précedente $4x^4+12x^3y+12xxyy+6xy^3+y^4$, ſe changera en celle-ci, $z^4-44z^3+510zz-5756z+169$, laquelle étant égalée au quarré $169-5756z+\frac{8278490}{169}zz-\frac{5756}{13}z^3+z^4$, dont le côté eſt $13-\frac{2878}{13}z-zz$, on trouvera $z \propto \frac{2048075}{20566}$, & par conſéquent $y \propto \frac{1904113}{20566}$, & à cauſe de

de $x \mathrel{\text{Ɔ}} 12 \mathrel{\text{Ɔ}} \frac{246792}{20566}$, on aura $x+y \mathrel{\text{Ɔ}} \frac{2150905}{20566}$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſe trouvera le même qu'auparavant.

Scolie.

Il eſt évident que par cette Queſtion, l'on trouve deux nombres, tels que leur ſomme eſt un nombre quarré, & la ſomme de leurs quarrez un nombre quarré-quarré, ces deux nombres étant les deux côtez du triangle rectangle précedent : mais on peut trouver trois nombres de cette qualité, comme vous allez voir dans la Queſtion ſuivante.

QUESTION XIV.

Trouver trois nombres, tels que leur ſomme ſoit un nombre quarré, & la ſomme de leurs quarrez un nombre quarré-quarré.

AYant mis x, y, z, pour les trois nombres qu'on cherche, on aura ſelon les conditions de la Queſtion, cette Puiſſance à égaler au quarré, $x+y+z$, & celle-ci à égaler au quarré-quarré, $xx+yy+zz$.

Pour rendre premierement quarré-quarrée la Puiſſance $xx+yy+zz$, on l'égalera au quarré, & encore le côté de ce quarré au quarré. Pour donc égaler au quarré la Puiſſance $xx+yy+zz$, on prendra $x+y \ldots z$, pour le côté de ce quarré, lequel par conſéquent ſera $xx+2xy+yy-2xz-2yz+zz$, de ſorte qu'on aura cette Equation, $xx+yy+zz \mathrel{\text{Ɔ}} xx+2xy+yy-2xz-2yz+zz$, dans laquelle on trouvera $z \mathrel{\text{Ɔ}} \frac{xy}{x+y}$, & les trois nom-

bres qu'on cherche, ſeront en entiers de cette grandeur, $xx+xy$, $yy+xy$, xy, & au lieu de la premiere Puiſſance $x+y+z$, on aura celle-ci à égaler au quarré, $xx+3xy+yy$, & au lieu du côté précedent $x+y \ldots z$, on aura celui-ci à égaler au quarré $xx+xy+yy$. Ainſi on aura ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$xx+3xy+yy.$$
$$xx+xy+yy.$$

ce qui ſe peut faire ici en égalant leur produit $x^4+4x^3y+5xxyy+4xy^3+y^4$, au quarré $x^4+4x^3y+2xxyy-4xy^3+y^4$, dont le côté eſt $xx+2xy \ldots yy$, ou bien au quarré $y^4+4xy^3+5xxyy+2x^3y+\frac{1}{4}x^4$, dont le côté eſt $yy+2xy+\frac{1}{2}yy$, & alors on trouvera $x \propto 8$, & $y \propto -3$: & comme cette derniere valeur eſt niée, on ſuppoſera $y \propto \omega-3$, & à cauſe de $x \propto 8$, on aura cet autre produit à égaler au quarré, $49+88\omega+86\omega\omega+20\omega^3+\omega^4$, pour le côté duquel prenant $7+\frac{47}{7}\omega \ldots \omega\omega$, ou bien $\omega\omega+10\omega+7$, on trouvera $\omega \propto \frac{186}{7}$, & par conſéquent $y \propto \frac{165}{7}$, & les trois nombres qu'on cherche, ſeront en entiers de cette grandeur, 12376, 36465, 9240, qui ſatisfont à la Queſtion : car leur ſomme 58081 a ſa Racine quarrée 241, & la ſomme 1568239201 de leurs quarrez 153165376, 1329696225, 85377600, a ſa Racine quarré-quarrée 199.

Ou bien ayant trouvé $x \propto 8$, & $y \propto -3$, les trois nombres qu'on cherche, ſeront 40, −15, 24 : & comme il en a un nié, on mettra $x+40$, $x-15$, $x+24$, pour les trois nombres qu'on cherche, dont la ſomme $3x+49$ doit être quarrée, & la ſomme $3xx+98x+2401$ de leurs quarrez $xx+80x+1600$, $xx-30x+225$, $xx+48x+576$, doit être quarré-quarrée.

Premierement pour rendre quarré quarrée la ſomme des quarrez $3xx+98x+2401$, on l'égalera au quarré $aaxx-98ax+2401$, dont le côté eſt $ax \ldots 49$, & l'on

l'on trouvera $x \mathrel{)\!\!(} \frac{98a+98}{aa-3}$, & au lieu du côté précedent $ax \ldots 49$, on aura celui-ci, $\frac{49aa+98a+147}{aa-3}$, qu'il faut égaler au quarré, & au lieu de la ſomme des nombres $3x+49$, on aura celle-ci, $\frac{49aa+294a+147}{aa-3}$. Ainſi nous avons ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$\frac{49aa+98a+147,\ 49aa+294a+147.}{aa-3}$$

ce qui ſe fera ici en les diviſant chacune par le nombre quarré 49, & en multipliant enſemble les deux quotiens, ou bien ſeulement leurs Numerateurs $aa+2a+3$, $aa+6a+3$, pour avoir en leur place cette ſeule Puiſſance à égaler au quarré, $a^4+8a^3+18aa+24a+9$, pour le côté duquel prenant $3+4a+\frac{1}{3}aa$, on trouvera $a \mathrel{)\!\!(} -6$. C'eſt pourquoi on ſuppoſera $a \mathrel{)\!\!(} \omega-6$, & l'on aura cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $\omega^4-16\omega^3+90\omega\omega-192\omega+81$, pour le côté duquel prenant $9-\frac{12}{3}\omega+\omega\omega$, on trouvera $\omega \mathrel{)\!\!(} \frac{47}{2}$, & par conſéquent $a \mathrel{)\!\!(} \frac{11}{2}$, & $x \mathrel{)\!\!(} \frac{9996}{121}$, & les trois nombres qu'on cherche, ſeront en entiers de cette grandeur 10516, 9801, 10308, qui ſatisfont aux conditions de la Queſtion, parce que leur ſomme 30625 a ſa Racine quarrée 175, & la ſomme 3129007 21 de leurs quarrez 110586256, 96059601, 106254864, a ſa Racine quarré-quarrée 133.

Ou bien encore faites du Binome $xx+2yy$, le quarré ſuivant $x^4+4xxyy+4y^4$, qui eſt compoſé des trois quarrez x^4, $4xxyy$, $4y^4$, dont les côtez ſont xx, $2xy$, $2yy$, que vous prendrez pour les trois nombres qu'on cherche, car ainſi la ſomme de leurs quarrez aura ſa Racine quarrée $xx+2yy$, qu'il faudra encore égaler au quarré: & comme il faut auſſi égaler au quarré la ſomme $xx+2xy+2yy$ des trois nombres, on aura ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$xx+2xy+2yy.$
$xx+2yy.$

Pour cette fin égalez leur produit $x^4+4xxyy+2x^3y+4xy^3+4y^4$, au quarré $y^4+4xy^3-4xxyy+\frac{1}{2}x^3y+\frac{9}{16}x^4$, dont le côté eſt $2yy+xy+\frac{1}{4}xx$, & vous trouverez $x\mathrel{)\!\!)}-8$, & $y\mathrel{)\!\!)}7$. C'eſt pourquoi vous ſuppoſerez $x\mathrel{)\!\!)}z-8$, & à cauſe de $y\mathrel{)\!\!)}7$, le produit précedent $x^4+4xxyy+2x^3y+4xy^3+4y^4$, ſe changera en celui-ci, $z^4-18z^3+244zz+1124z+8100$, lequel étant égalé au quarré $z^4-18z^3+261zz-1620z+8100$, dont le côté eſt $zz-9z+90$, on trouvera $z\mathrel{)\!\!)}\frac{496}{17}$, & par conſéquent $x\mathrel{)\!\!)}\frac{160}{17}$, & à cauſe de $y\mathrel{)\!\!)}7\mathrel{)\!\!)}\frac{119}{17}$, les trois nombres qu'on cherche, ſeront en entiers de cette grandeur, 64800, 42840, 14161, qui ſatisfont aux conditions de la Queſtion: car leur ſomme 121801 a ſa Racine quarrée 349, & la ſomme 623483952 1 de leurs quarrez 8199040000, 1835265600, 200533921, a ſa Racine quarré-quarrée 281.

Si vous voulez de plus petits nombres, les voici, 69, 2382, 3174, qui ſatisfont aux conditions de la Queſtion: car leur ſomme 5625 a ſa Racine quarrée 75, & la ſomme 15752961 de leurs quarrez 4761, 5673924, 1074276, a ſa Racine quarré-quarrée 63.

Les trois nombres ſuivans ſont encore plus petits, 64, 152, 409, & ils ſatisfont auſſi à la Queſtion: car leur ſomme 625 a ſa Racine quarrée 25, & la ſomme 194481, de leurs quarrez 4096, 23104, 167281, a ſa Racine quarré-quarrée 21.

Mais les plus petits de tous ſont les trois ſuivans, 8, 49, 64, qui ſatisfont auſſi aux conditions de la Queſtion: car leur ſomme 121 a ſa Racine quarrée 11, & la ſomme 6561 de leurs quarrez 64, 2401, 4096, a ſa Racine quarré-quarrée 9.

On

On peut trouver quatre nombres de la même qualité, & même leur ajoûter quelqu'autre condition, comme vous allez voir dans la Queſtion ſuivante.

QUESTION XV.

Trouver quatre nombres tels que leur ſomme ſoit un nombre quarré, & la ſomme de leurs quarrez un nombre quarré quarré.

AYant trouvé par la Queſtion précedente trois nombres de cette qualité, comme 8, 49, 64, mettez x, $8+x$, $49-3x$, $64+x$, pour les quatre nombres qu'on cherche, afin que leur ſomme 121 ſoit un nombre quarré, dont le côté eſt 11: c'eſt pourquoi il n'y aura plus qu'à égaler au quarré quarré 6561, la ſomme $6561-150x+12xx$ de leurs quarrez xx, $64+16x+xx$, $2401-294x+9xx$, $4096+128x+xx$, pour avoir $x \propto \frac{11}{2}$, & les quatre nombres qu'on cherche, ſeront en entiers de cette grandeur, 50, 82, 306, 46, qui ſatisfont à la Queſtion: car leur ſomme 484 a ſa Racine quarrée 22, & la ſomme 104976 de leurs quarrez 2500, 6724, 93636, 2116, a ſa Racine quarré quarrée 18.

Cette Queſtion ſe peut reſoudre immediatement, & ſans avoir recours à la précedente, & faire mêmes que les quatre nombres qu'on cherche, ſoient en proportion arithmetique, ſçavoir en cherchant premierement *trois quarrez, dont la ſomme ſoit un Quarre-quarré, en cette ſorte.*

Faites du Binome $xx+2yy$, le quarré ſuivant $x^4+4xxyy+4y^4$, qui eſt compoſé de ces trois quarrez x^4, $4xxyy$, $4y^4$, que vous prendrez pour les trois que l'on cherche, car ainſi leur ſomme $x^4+4xxyy+4y^4$, aura

ſa Racine quarrée $xx+2yy$: c'eſt pourquoi il n'y aura plus qu'à égaler au quarré cette Racine quarrée $xx+2yy$, pour le côté duquel prenant $x \ldots a$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $xx+2yy \propto xx-2ax+aa$, on trouvera $x \propto \frac{aa-2yy}{2a}$, & les côtez des trois quarrez qu'on cherche, ſeront en entiers de cette grandeur, $a^4-4aayy+4y^4$, $4a^3y-8ay^3$, $8aayy$, par le moyen deſquels on reſoudra la Queſtion propoſée en cette ſorte.

Mettez z, $z-a^4+4aayy-4y^4$, $z-4a^3y+8ay^3$, $8aayy-z$, pour les quatre nombres qu'on cherche, auſquels on donnera la proportion arithmetique, en égalant la ſomme $8aayy$ des deux extrêmes à la ſomme $2z-a^4-4a^3y+4aay+8ay^3-4y^4$ des deux moyens, & alors on trouvera $z \propto \frac{1}{2}a^4+2a^3y+2aayy-4ay^3+2y^4$, & les quatre nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

$\frac{1}{2}a^4+2a^3y+2aayy-4ay^3+2y^4$.
$-\frac{1}{2}a^4+2a^3y+6aayy-4ay^3-2y^4$.
$\frac{1}{2}a^4-2a^3y+2aayy+4ay^3+2y^4$.
$-\frac{1}{2}a^4-2a^3y+6aayy+4ay^3-2y^4$.

qui ſatisfont aux conditions de la Queſtion, parce qu'il arrive que leur ſomme $16aayy$ a ſa Racine quarrée $4ay$, & que la ſomme de leurs quarrez, $a^8+8a^6yy+24a^4y^4+32aay^6+16y^8$, a ſa Racine quarré-quarrée $aa+2yy$, &c.

LEMME.

Trouver en nombres un triangle rectangle, tel que le double du produit ſous le plus petit des deux côtez & l'excès de l'hypotenuſe ſur le plus grand, ſoit un nombre quarré.

SI l'on met $x+y$ pour le plus grand des deux côtez, $x-y$, pour le plus petit, & z pour l'hypotenuſe du triangle

triangle rectangle qu'on cherche, on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $2xz-2yz-2xx+2yy$; & cette Equation, $z \gtrless \sqrt{2xx+2yy}$, qui rendra rectangle le triangle qu'on cherche, & qui fait connoître que nous avons encore cette Puiſſance à égaler au quarré, $2xx+2yy$, ce qui eſt facile, parce que la ſomme 4 des unitez eſt un nombre quarré, dont le côté eſt 2. Suppoſez donc $x \gtrless y+\omega$, & au lieu de la Puiſſance $2xx+2yy$, vous aurez celle-ci à égaler au quarré, $4yy+4y\omega+2\omega\omega$, pour le côté duquel prenant $2y \ldots \frac{a\omega}{b}$, on trouvera en entiers $y \gtrless aa-2bb$, & $\omega \gtrless 4bb+4ab$, & par conſéquent $x \gtrless aa+4ab+2bb$, & $z \gtrless 4bb+4ab+2aa$, & au lieu de la premiere Puiſſance $2xz-2yz-2xx+2yy$, on aura en moindres termes celle-ci à égaler au quarré, $2bb+2ab$, pour le côté duquel prenant $\frac{cb}{d}$, on trouvera en entiers $a \gtrless cc-2dd$, & $b \gtrless 2dd$, & par conſéquent $x \gtrless c^4+4ccdd-4d^4$, $y \gtrless c^4-4ccdd-4d^4$, & $z \gtrless 2c^4+8d^4$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſera en moindres termes de cette grandeur,

$$4ccdd,\ c^4-4d^4,\ c^4+4d^4.$$

Si l'on ſuppoſe $c \gtrless 3$, & $d \gtrless 1$, le triangle rectangle qu'on cherche, ſera 36, 77, 85, & ſi l'on ſuppoſe $c \gtrless \sqrt{8}$, & $d \gtrless \sqrt{\frac{1}{2}}$, le triangle rectangle ſera 16, 63, 65.

Pour faire que le premier côté $4ccdd$ ſoit toûjours moindre que le ſecond c^4-4d^4, on aura cette inégalité, $c^4-4d^4 \oplus 4ccdd$, ou $c^4-4d^4-4ccdd \oplus 0$, à laquelle ajoûtant, $8d^4$, on aura cette autre inégalité, $c^4-4ccdd+4d^4 \oplus 8d^4$, & par la Racine quarrée on aura celle-ci, $cc-2dd \oplus \sqrt{8d^4}$, ou $cc \oplus 2dd+\sqrt{8d^4}$, & par conſéquent

$c \oplus \sqrt{2dd+\sqrt{8d^4}}$.

Si l'on fait $c \ominus \sqrt{2dd+\sqrt{8d^4}}$, en ſuppoſant par exemple

$c \gg 2$, & $d \gg 1$, on aura le triangle rectangle 3, 4, 5, tel que le double du produit ſous le plus grand des deux côtez & l'excès de l'hypotenuſe ſur le plus petit, ſçavoir 16, eſt un nombre quarré, dont le côté eſt 4.

QUESTION XVI.

Trouver un triangle rectangle, dont l'aire étant ôtée du plus grand des deux côtez & de l'hypotenuſe, il reſte deux nombres quarrez.

COmme le triangle rectangle qu'on cherche, ne peut être exprimé qu'en Fractions, ſuppoſons que a, b, h, ſoit un triangle rectangle, dont l'hypotenuſe ſoit h, le plus petit des deux côtez ſoit a, & le plus grand ſoit b: & mettez $\frac{a, b, h}{x}$, pour le triangle rectangle qu'on cherche, & ſelon les conditions de la Queſtion, vous aurez ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$\frac{b}{x} - \frac{ab}{2xx}$$
$$\frac{h}{x} - \frac{ab}{2xx}$$

& ſi on les multiplie chacune par le quarré $4xx$, on aura en entiers, ces deux autres Puiſſances à égaler au quarré,

$$4bx - 2ab.$$
$$4hx - 2ab.$$

Si on égale la premiere $4bx - 2ab$, au quarré yy, on trouvera $x \gg \frac{yy+2ab}{4b}$; & ſi on égale la deuxiéme $4hx - 2ab$ au quarré zz, on trouvera le même $x \gg \frac{zz+2ab}{4b}$; ainſi

ainſi on aura cette Equation, $\frac{yy+2ab}{4b} \gtrless \frac{zz+2ab}{4b}$, dans laquelle on trouvera $bz \gtrless \sqrt{bbyy+2abbb-2ab^3}$. Il faut donc égaler au quarré cette Puiſſance $bbyy+2abbb-2ab^3$, ce qui ſeroit facile ſi $2abbb-2ab^3$ étoit un nombre quarré, ce qui arrivera ſi $2ab-2ab$ eſt un nombre quarré, & comme cette Puiſſance $2ab-2ab$ eſt le double du produit ſous le petit côté a du triangle rectangle a, b, h, & l'excès $h-b$ de l'hypotenuſe h ſur le plus grand côté b, on voit qu'elle deviendra quarrée, ſi à la place du triangle rectangle a, b, h, on met le triangle rectangle 16, 63, 65, qui a été trouvé au Lemme précedent, en ſorte qu'on ait $a \gtrless 16$, $b \gtrless 63$, & $h \gtrless 65$, & alors au lieu de la Puiſſance précedente $bbyy+2abbb-2ab^3$, on aura celle-ci à égaler au quarré, $4095yy+254016$, pour le côté duquel prenant $504+\frac{cy}{d}$, on trouvera $y \gtrless \frac{1008cd}{4095d-cc}$, &c.

Si l'on ſuppoſe $c \gtrless 63$, & $d \gtrless 1$, on trouvera $y \gtrless 504$, $z \gtrless 512$, & $x \gtrless 1016$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſera $\frac{16, 63, 65}{1016}$, qui ſatisfait à la Queſtion: car ſon aire $\frac{504}{1016}$ étant ôtée du plus grand côté $\frac{63}{1016}$, il reſte ce nombre quarré $\frac{63504}{1032256}$, dont le côté eſt $\frac{252}{1016}$: & étant ôtée de l'hypotenuſe $\frac{65}{1016}$, il reſte ce nombre quarré $\frac{65536}{1032256}$, dont le côté eſt $\frac{256}{1016}$.

Si au lieu du triangle rectangle 16, 63, 65, on prend le triangle rectangle 3, 4, 5, qui a été trouvé au même Lemme précedent, & que l'on ſuppoſe $a \gtrless 4$, $b \gtrless 3$, & $h \gtrless 5$, au lieu de la Puiſſance $bbyy+2abbb-2ab^3$, on aura celle-ci à égaler au quarré, $15yy+144$, pour le côté duquel prenant $12+\frac{cy}{d}$, on trouvera $y \gtrless \frac{24cd}{15dd-cc}$, &c.

Si l'on ſuppoſe $c \propto 3$, & $d \propto 1$, on trouvera $y \propto 12$, $z \propto 16$, & $x \propto 14$, & l'on aura ce triangle rectangle $\frac{3.4.5}{12}$, qui eſt tel que ſi on ôte ſon aire $\frac{6}{196}$ du plus petit côté $\frac{3}{14}$, & de l'hypotenuſe $\frac{5}{14}$, il reſtera ces deux nombres quarrez, $\frac{36}{196}\ \frac{64}{196}$, dont les côtez ſont $\frac{6}{14}\ \frac{8}{14}$.

Pour avoir une ſolution plus générale, prenez le triangle rectangle indefini $4ccdd$, c^4-4d^4, c^4+4d^4, qui a été trouvé dans le Lemme précedent, en ſuppoſant $a \propto 4ccdd$, $b \propto c^4-4d^4$, & $h \propto c^4+4d^4$, & alors la Puiſſance $bhyy+2abbh-2ab^3$, ſe changera en celle-ci, $c^8yy-16d^8yy+64c^{10}d^6-512c^6d^{10}+1024ccd^{14}$, laquelle étant égalée au quarré $64c^{10}d^6-512c^6d^{10}+1024ccd^{14}-64cd^7my+16c^5d^3my+mmyy$, on trouvera $y \propto \frac{16c^5d^3m-64cd^7m}{c^8-16d^8-mm}$, &c.

QUESTION XVII.

Trouver deux triangles rectangles, dont les lignes ſoient telles, que la difference des deux plus petites du premier, ſoit égale à la difference des deux plus grandes du ſecond: & que reciproquement la difference des deux plus petites du ſecond, ſoit égale à la difference des deux plus grandes du premier.

SI l'on met a pour la plus petite ligne du premier triangle rectangle: b pour la moyenne, & c pour la plus grande ou hypotenuſe: & x pour la plus petite ligne du ſecond triangle rectangle, y pour la moyenne, & z pour la plus grande ou hypotenuſe; on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces deux Equations,

$$b-a \propto z-y.$$
$$c-b \propto y-x.$$

Dans

Dans la premiere $b-a \gtrless z-y$, on trouvera $y \gtrless a-b+z$. & dans la ſeconde $c-b \gtrless y-x$, on trouvera le même $y \gtrless c-b+x$: c'eſt pourquoi on aura cette troiſiéme Equation, $a-b+z \gtrless c-b+x$, dans laquelle on trouvera $z \gtrless c-a+x$, & au lieu du ſecond triangle rectangle x, y, z, on aura celui-ci, x, $c-b+x$, $c-a+x$, qu'on rendra rectangle en égalant la ſomme des quarrez des deux premieres lignes au quarré de la troiſiéme, par cette Equation, $cc-2bc+bb+2cx-2bx+2xx \gtrless cc-2ac+aa+2cx-2ax+xx$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless \sqrt{2aa-2ab-2ac+2bc}+b-a$. Ainſi on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $2aa-2ab-2ac+2bc$. Mais afin que le premier triangle a, b, c, ſoit rectangle, on a cette Equation, $aa+bb \gtrless cc$, dans laquelle on trouvera $c \gtrless \sqrt{aa+bb}$. Ainſi on a encore cette Puiſſance à égaler au quarré, $aa+bb$. Nous avons donc ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$\begin{matrix} 2aa-2ab-2ac+2bc. \\ aa+bb \end{matrix}$$

Si on égale la ſeconde Puiſſance $aa+bb$, au quarré $aa-\frac{2adb}{m}+\frac{ddbb}{mm}$, dont le côté eſt $a...\frac{db}{m}$, trouvera on en entiers $a \gtrless dd-mm$, & $b \gtrless 2dm$, & par conſéquent $c \gtrless dd+mm$, & au lieu de la premiere Puiſſance $2aa-2ab-2ac+2bc$, on aura en moindres termes celle-ci à égaler au quarré, $mm+2dm-dd$, pour le côté duquel prenant $m...p$, on trouvera $m \gtrless \frac{pp+dd}{2p+2d}$, & l'on aura en entiers

$$\left.\begin{matrix} a \gtrless 3d^4+8pd^3+2ppdd-p^4. \\ b \gtrless 4d^4+4pd^3+4ppdd+4p^3d. \\ c \gtrless 5d^4+8pd^3+6ppdd+p^4 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} premier \\ Triangle \\ rectangle. \end{matrix}$$

$x \gtrless 3p^4$

$x \mathrel{\text{Ø}} 3p^4+8p^3d+2ppdd-d^4$. } *Second*
$y \mathrel{\text{Ø}} 4p^4+4p^3d+4ppdd+4pd^3$. } *triangle*
$z \mathrel{\text{Ø}} 5p^4+8p^3d+6ppdd+d^4$ } *rectangle.*

Si l'on ſuppoſe $d \mathrel{\text{Ø}} 1$, & $p \mathrel{\text{Ø}} 2$, les deux triangles rectangles qu'on cherche, ſeront tels, 11, 60, 61, & 119, 120, 169, qui ſatisfont aux conditions de la Queſtion: car la difference 49 des deux plus petites lignes 11, 60, du premier eſt égale à la difference 49 des deux plus grandes 120, 169, du ſecond: & reciproquement la difference 1 des deux plus petites lignes 119, 120, du ſecond eſt égale à la difference 1, des deux plus grandes 60, 61, du premier.

QUESTION XVIII.

Trouver en nombres entiers un triangle rectangle, où la difference des deux côtez ſoit égale à un nombre entier donné.

SI le nombre donné eſt a, & que l'on mette x, $x+a$, pour les deux côtez du triangle rectangle qu'on cherche, ſon hypotenuſe ſera $\sqrt{2xx+2ax+aa}$, & l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $2xx+2ax+aa$, pour le côté duquel on prendra $a \ldots 2x$, & l'on trouvera $x \mathrel{\text{Ø}} 3a$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſera $3a$, $4a$, $5a$.

Pour avoir un autre triangle rectangle, ſervez-vous du précedent, & mettez $x+3a$, $x+4a$, pour les deux côtez du triangle rectangle qu'on cherche, dont l'hypotenuſe ſera $\sqrt{2xx+14ax+25aa}$, & l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarre, $2xx+14ax+25aa$, pour le côté duquel prenant $5a \ldots 2x$, on trouvera $x \mathrel{\text{Ø}} 17a$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſera $20a$, $21a$, $29a$.

Pareillement pour avoir un autre triangle rectangle,

gle, ſervez vous du précedent ; & mettez $x+20a$, $x+21a$, pour les deux côtez du triangle rectangle qu'on cherche, dont l'hypotenuſe ſera $\sqrt{1xx+82ax+841aa}$, & l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $2xx+82ax+841aa$, pour le côté duquel prenant $29a...2xx$, on trouvera $x \propto 9a$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſera $119a$, $120a$, $169a$, par le moyen duquel on en pourra trouver un autre de la même façon, & par le moyen de cet autre encore un autre, & ainſi en ſuite.

QUESTION XIX.

Trouver un nombre cubique, lequel avec ſes parties aliquotes faſſe un nombre quarré.

SI l'on met x^3 pour le cube qu'on cherche, on aura ſelon la condition de la Queſtion, cette Puiſſance à égaler au quarré, $x^3+xx+x+1$, pour le côté duquel prenant $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}xx$, on trouvera $x \propto \frac{40}{3}$. Mais comme cette valeur doit être un nombre entier, qui ſoit premier, afin que ſon cube n'ait pas plus de parties aliquotes que nous n'en avons ſuppoſé dans l'Analyſe, on égalera autrement au quarré la Puiſſance $x^3+xx+x+1$, ce qui ſe fera aiſément, parce qu'elle a ces deux nombres produiſans $xx+1$, $x+1$, que l'on ne peut pas égaler enſemble : c'eſt pourquoi on en multipliera un, comme le premier $xx+1$, par le quarré indéterminé cc, & le ſecond $x+1$ par le quarré indéterminé bb, & on égalera enſemble les deux produits, par cette Equation, $bbx+bb \propto ccxx+cc$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{bb+\sqrt{b^4+4bbcc-4c^4}}{2cc}$. Ainſi on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $b^4+4bbcc-4c^4$, ce qui ſera facile, parce que la ſomme 1 des uni-

tez

tez eſt un nombre quarré. Suppoſez donc $x \gtrless y + c$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $y^4 + 4cy^3 + 10ccyy + 12c^3y + c^4$, pour le côté duquel prenant $cc + 6cy - yy$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $y^4 + 4cy^3 + 10ccyy + 12c^3y + c^4 \gtrless c^4 + 12c^3y + 34ccyy - 12cy^3 + y^4$, on trouvera $y \gtrless 3$, & $c \gtrless 2$, & par conſéquent $b \gtrless 5$, & $x \gtrless 7$, & le cube qu'on cherche ſera 343, lequel avec ſes parties aliquotes 1, 7, 49, fait le nombre quarré 400, dont le côté eſt 20.

QUESTION XX.

Trouver un nombre quarré, duquel ſi l'on ôte ſes parties aliquotes, il reſte un nombre cubique.

SI l'on met $x + 1$, pour le côté du quarré qu'on cherche, ce quarré ſera $xx + 2x + 1$, lequel étant diminué de ſes parties aliquotes 1, & $x + 1$, c'eſt à dire de $x + 2$, il reſtera $xx + x - 1$, qu'il faut égaler au cube, pour le côté duquel prenant $-1 + \frac{x}{1}$, $-1 + x - \frac{1}{3}xx + \frac{1}{3+7}x^3$, on trouvera $x \gtrless 36$, & par conſéquent $x + 1 \gtrless 37$, pour le côté du quarré qu'on cherche, lequel ſera 1369, duquel ſi l'on ôte ſes deux parties aliquotes 1, & 37, il reſtera ce nombre cubique 1331, dont le côté eſt 11. Le nombre quarré 4 ſatisfait auſſi, car étant diminué de ſes parties aliquotes 1, 2, il reſte 1, qui eſt un nombre cubique. Il a été découvert dans la Queſtion ſuivante.

QUESTION XXI.

Trouver un nombre quarré, duquel ſi l'on ôte ſes parties aliquotes, il reſte un autre nombre quarré.

SI l'on met x pour le côté du quarré qu'on cherche, ce quarré ſera xx, duquel ſi on ôte ſes parties,

ties aliquotes 1, x, il reſtera $xx-1x-1$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $x-1$, en ſorte qu'on ait cette Equation, $xx-1x-1 \propto xx-2x+1$, on trouvera $x \propto 2$, & le quarré qu'on cherche, ſera 4, duquel ſi on ôte ſes parties aliquotes 1, 2, le reſte 1, a ſa Racine quarrée 1, & auſſi ſa Racine cubique, comme nous avons déja remarqué dans la Queſtion précedente.

QUESTION XXII.

Trouver un nombre quarré, auquel ſi l'on ajoûte ſes parties aliquotes, la ſomme ſoit un nombre quarré.

SI l'on met $2x$ pour le côté du quarré qu'on cherche, ce quarré ſera $4xx$, lequel avec ſes parties aliquotes, 1, 2, 4, $1x$, $2x$, $4x$, $1xx$, $2xx$, fait $7xx+7x+7$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant 7, qui eſt commun à tous les termes de cette Puiſſance, en ſorte qu'on ait cette Equation, $7xx+7x+7 \propto 49$, ou $xx+1x \propto 6$, l'on trouvera $x \propto 2$: or quoi que cette valeur ſoit un nombre premier, neanmoins elle n'eſt pas propre pour reſoudre la Queſtion, parce que ſe rencontrant dans le côté ſuppoſé $2x$, elle donne 4 pour ce côté, qui donne 16 pour le quarré qu'on cherche, lequel a moins de parties aliquotes que nous n'avons ſuppoſé dans l'Analyſe, ce qui l'empêche de reſoudre la Queſtion.

Au lieu donc d'égaler la Puiſſance précedente $7xx+7x+7$, au quarré 49, on la peut égaler au quarré de 49, c'eſt-à dire au quarré 2401, & alors on trouvera $x \propto 18$, & comme cette valeur n'eſt pas un nombre premier, elle eſt encore moins propre à reſoudre la Queſtion que la précedente: car ſon quarré ſera 324, qui a bien plus de parties aliquotes que nous n'avons

n'avons ſuppoſé dans l'analyſe, ces parties aliquotes étant 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108, 162, leſquelles étant ajoûtées au quarré 324, font 767, qui n'eſt pas un nombre quarré.

Mettez donc $3x$ pour le côté du quarré qu'on cherche, lequel par conſéquent ſera $9xx$, dont les parties aliquotes ſont 1, 3, $1x$, $3x$, $9x$, $1xx$, $3xx$; & ſelon la condition de la Queſtion, l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $13xx+13x+13$, pour le côté duquel prenant 13, qui eſt commun à tous les termes de cette Puiſſance, en ſorte qu'on ait cette Equation, $13xx+13x+13 \mathrel{)\!(} 169$, on trouvera $x \mathrel{)\!(} 3$, & bien que cette valeur ſe trouve dans le côté ſuppoſé $3x$, elle ne laiſſe pas de reſoudre la Queſtion, car ce côté ſera 9, dont le quarré 81 fait avec ſes parties aliquotes 1, 3, 9, 27, ce nombre quarré 121, dont le côté eſt 11.

Pour trouver un autre nombre quarré, mettez $4x$ pour ſon côté, & ce quarré ſera $16xx$, lequel avec ſes parties aliquotes, 1, 2, 4, 8, 16, $1x$, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$, $1xx$, $2xx$, $4xx$, $8xx$, fait $31xx+31x+31$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant 31, qui eſt commun à tous les termes de cette Puiſſance, en ſorte qu'on ait cette Equation, $31xx+31x+31 \mathrel{)\!(} 961$, l'on trouvera $x \mathrel{)\!(} 5$, & le côté du quarré qu'on cherche, ſera 20, dont le quarré 400 étant ajoûté à ſes parties aliquotes 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, fait ce nombre quarré 961, dont le côté eſt 31.

Si l'on met $25xx$ pour le quarré qu'on cherche, l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $31xx+31x+31$, ce qui étant fait comme auparavant, on trouvera 625 pour le quarré qu'on cherche, qui ne ſatisfera pas, parce qu'il a moins de parties aliquotes que nous n'avons ſuppoſé dans l'Analyſe. Par là

vous

vous voyez que les deux quarrez 16, 25, ſont tels, que chacun avec ſes parties aliquotes fait un même nombre, ſçavoir 31. Mais nous enſeignerons la maniere d'en trouver deux autres à la *Queſtion* 24.

QUESTION XXIII.

Trouver un nombre quarré, tel que la ſomme de ſes parties aliquotes ſoit un nombre quarré.

SI l'on met xx pour le nombre quarré qu'on cherche, ſes parties aliquotes ſeront x, 1, & leur ſomme ſera $x+1$, qu'il faut égaler à un quarré tel que pour x il vienne un nombre premier, comme au quarré 4, & alors on trouvera $x \mathrel{)\!\!)} 3$, & le nombre quarré qu'on cherche, ſera 9. dont les parties aliquotes 1, 3, font 4, qui a ſa Racine quarrée 2.

Si vous voulez un quarré qui ait plus de parties aliquotes, mettez x^4 pour ce quarré, dont les parties aliquotes ſont 1, x, xx, x^3, & ſelon la condition de la Queſtion, vous aurez, cette Puiſſance à égaler au quarré, $x^3+xx+x+1$, ce qui a été fait à la *Queſt.* 19. où nous avons trouvé $x \mathrel{)\!\!)} 7$. Ainſi le quarré qu'on cherche, ſera 2401, dont les parties aliquotes 1, 7, 49, 343, font enſemble 400, qui a ſa Racine quarrée 20.

Remarque.

La premiere methode ſervira pour *trouver un nombre quarré, dont les parties aliquotes faſſent enſemble un nombre cubique:* car mettant xx pour ce nombre quarré, ſes parties aliquotes ſeront 1, x, dont la ſomme $x+1$ doit être égalée à un cube, tel que ſi on en retranche 1, il reſte un nombre premier pour x; ce cube eſt 8. Si donc on fait cette Equation, $x+1 \mathrel{)\!\!)} 8$, on trouvera $x \mathrel{)\!\!)} 7$, & le quarré qu'on cherche ſera 49;

dont les parties aliquotes 1, 7, font enſemble 8, qui a ſa Racine cubique 2.

QUESTION XXIV.

Trouver deux nombres quarrez, dont chacun avec ſes parties aliquotes faſſe une même ſomme.

SI l'on met $2x$, $7y$, pour les côtez des deux quarrez qu'on cherche, ces deux quarrez ſeront $4xx$, $133yy$, & ſelon la condition de la Queſtion on aura cette Equation, $7xx+7x+7 \mathrel{)\!(} 133yy+133y+133$, dans laquelle on trouvera $x \mathrel{)\!(} -\frac{1}{2}+\sqrt{19yy+19y+\frac{73}{4}}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $19yy+19y+\frac{73}{4}$, ou $76yy+76y+73$, ce qui ſera facile, parce que la ſomme 225 des unitez a ſa Racine quarrée 15. Suppoſez donc $y \mathrel{)\!(} z+1$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $76zz+228z+225$, pour le côté duquel prenant $15 \ldots \frac{19}{2}z$, on trouvera $z \mathrel{)\!(} 36$, & à cauſe de $y \mathrel{)\!(} z+1$, on aura $y \mathrel{)\!(} 37$, & par conſéquent $x \mathrel{)\!(} 163$, & les côtez des deux quarrez qu'on cherche, ſeront 326, 407. C'eſt pourquoi les deux quarrez ſeront 106276, 165649, dont châcun avec ſes parties aliquotes fait 187131.

Les deux nombres ſuivans 627, 749, ſont tels que chacun de leurs quarrez 393129, 561001, fait avec ſes parties aliquotes une même ſomme, ſçavoir 658749: & il y en a une infinité d'autres, mais on n'en peut point trouver de plus petits que les deux ſuivans 4, 5, dont les quarrez 16, 25, font chacun avec ſes parties aliquotes une même ſomme, ſçavoir 31.

Remarque.

Quand on ne voudra pas que les deux nombres qu'on cherche, ſoient quarrez, il ſera facile de les trouver:

trouver: car ſi l'on met par exemple $2x$, $4y$, pour ces deux nombres, on aura ſelon la condition de la Queſtion cette Equation, $7y+7 \mathrel{)\!(} 3x+3$, dans laquelle on trouvera $x \mathrel{)\!(} \frac{7y+4}{3}$, & comme les deux quantitez indéterminées x, y, doivent être des nombres premiers, ſi l'on ſuppoſe $y \mathrel{)\!(} 5$, l'on trouvera $x \mathrel{)\!(} 13$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 26, 20, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 42.

Pour avoir deux autres nombres, ſuppoſez $y \mathrel{)\!(} 17$, & alors vous trouverez $x \mathrel{)\!(} 41$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 82, 68, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 126.

Ou bien ſuppoſez $y \mathrel{)\!(} 41$, pour avoir $x \mathrel{)\!(} 97$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 194, 164, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 294.

On peut auſſi mettre $4x$, $8y$, pour les deux nombres qu'on cherche, & alors on aura ſelon la condition de la Queſtion, cette Equation, $7x+7 \mathrel{)\!(} 15y+15$, dans laquelle vous trouverez $x \mathrel{)\!(} \frac{15y+8}{7}$. C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $y \mathrel{)\!(} 13$, on trouvera $x \mathrel{)\!(} 29$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 116, 104, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 210.

Pour trouver facilement le nombre premier que l'on doit attribuer à y, pour faire que x ſoit auſſi un nombre premier, ôtez dans la Fraction $\frac{15y+8}{7}$, le Dénominateur 7, autant de fois qu'il ſera poſſible des nombres 15 & 8, du Numerateur $15y+8$, & il reſtera $\frac{y+1}{7}$, & égalez cette Fraction, à un nombre tel qu'étant multiplié par 7, & que du produit ôtant 1, il reſte un nombre premier pour y: comme à 2, & alors on trou-

vera $y \gg 13$, comme nous avons ſuppoſé. Si on l'égale à 6, on trouvera $y \gg 41$, & par conſéquent $x \gg 89$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 356, 328, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 630.

En ſuivant la progreſſion double, on peut auſſi mettre $8x$, $16y$, pour les deux nombres qu'on cherche, & alors on aura ſelon la condition de la Queſtion, cette Equation, $15x+15 \gg 31y+31$, dans laquelle on trouvera $x \gg \frac{31y+16}{15}$, & ſi l'on ſuppoſe $y \gg 29$, on trouvera $x \gg 61$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 488, 464, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 930.

Ainſi vous voyez qu'en ſuivant la progreſſion double, on peut trouver à l'infini des nombres toûjours plus grands, & les plus petits de tous ſe trouveront en mettant $1x$, $2y$, pour ces deux nombres, & alors on aura ſelon la condition de la Queſtion, cette Equation, $x+1 \gg 3y+3$, dans laquelle on trouvera $x \gg 3y+2$: c'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $y \gg 3$, on trouvera $x \gg 11$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 11, 6, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 12.

Mais ſi l'on ſuppoſe $y \gg 5$, l'on trouvera $x \gg 17$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 23, 14, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 24.

Ces deux mêmes nombres ſe trouveront en ſuppoſant $y \gg 7$: parce qu'alors on trouve $x \gg 23$: mais ſi l'on ſuppoſe $y \gg 13$, on trouvera $x \gg 41$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 41, 26, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 42, comme les deux 26, 20, qui ont été trouvez auparavant. Ainſi nous avons ces trois nombres 20, 26, 41; dont chacun avec ſes parties aliquotes fait une même ſomme, ſçavoir 42.

Pareillement ſi dans la même Equation, $x \gg 3y+2$ l'on ſuppoſe $y \gg 17$, l'on trouvera $x \gg 53$, & les deux nombres

nombres qu'on cherche, ſeront 53, 34, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 54: & ſi l'on ſuppoſe $y \gg 19$, on trouvera $x \gg 59$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 59, 38, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 60.

Que ſi l'on ſuppoſe $y \gg 23$, on trouvera $x \gg 71$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 71, 46, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 72: & ſi l'on ſuppoſe $y \gg 29$, on trouvera $x \gg 89$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 89, 58, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 90.

Au lieu de la progreſſion double, on peut ſe ſervir de la triple, ſçavoir en mettant $1x$, $3y$, pour les deux nombres qu'on cherche, & alors on aura ſelon la condition de la Queſtion, cette Equation, $x+1 \gg 4y+4$, dans laquelle on trouvera $x \gg 4y+3$: & ſi l'on ſuppoſe $y \gg 2$, on trouvera $x \gg 11$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 11, 6, comme auparavant: mais ſi l'on ſuppoſe $y \gg 5$, l'on trouvera $x \gg 23$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 23, 15, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 24, comme les deux 23, 14, qui ont été trouvez auparavant. Ainſi nous avons encore trois nombres 14, 15, 23, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait une même ſomme, ſçavoir 24.

Que ſi l'on ſuppoſe $y \gg 17$, l'on trouvera $x \gg 71$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 71, 51, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 72, comme les deux 71, 46, qui ont été trouvez auparavant. Ainſi nous avons encore trouvé trois nombres 46, 51, 71, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait une même ſomme, ſçavoir 72.

Pareillement ſi l'on met $2x$, $6y$, pour les deux nombres qu'on cherche, l'on aura ſelon la condition de la Queſtion, cette Equation, $3x+3 \gg 12y+12$, dans laquelle on trouvera $x \gg 4y+3$. C'eſt pourquoi ſi l'on

ſuppoſe $y \gg 5$, on trouvera $x \gg 23$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront 46, 30, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 72, comme les deux 71, 46, ou comme les deux 71, 51, qui ont été trouvez auparavant. Ainſi nous avons trouvé quatre nombres 30, 46, 51, 71, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait une même ſomme, ſçavoir 72.

C'eſt par hazard que nous avons trouvé quatre nombres, tels que chacun avec ſes parties aliquotes, fait une même ſomme, mais on les peut trouver par methode, & davantage ſi l'on veut, lorſqu'on en a trouvé deux, en cette ſorte.

Ayant trouvé par exemple ces deux nombres 30, 46, dont chacun avec ſes parties aliquotes fait 72 : pour trouver un troiſiéme nombre, lequel avec ſes parties aliquotes faſſe auſſi 72, mettez $1x$ pour ce nombre, & alors on aura cette Equation, $1x+1 \gg 72$, dans laquelle on trouvera $x \gg 71$, pour le troiſiéme nombre qu'on cherche.

Si vous en voulez un quatriéme de la même qualité, mettez $3x$ pour ce nombre, lequel avec ſes parties aliquotes 1, 3, $1x$, doit faire 72 ; ainſi on aura cette Equation, $4x+4 \gg 72$, dans laquelle on trouvera $x \gg 51$, pour le quatriéme nombre qu'on cherche.

Si l'on met $5x$ pour un cinquiéme nombre, l'on aura cette Equation, $6x+6 \gg 72$, dans laquelle on trouvera $x \gg 11$, & le cinquiéme nombre qu'on cherche, ſera 55. Ainſi des autres.

QUESTION

QUESTION XXV.

Trouver deux nombres quarrez, dont le premier avec ſes parties aliquotes ſoit égal aux parties aliquotes du ſecond.

SI l'on met xx, $4yy$, pour les deux quarrez qu'on cherche, l'on aura ſelon la condition de la Queſtion, cette Equation, $xx+x+1 \mathrel{\overline{)}} 3yy+7y+7$, dans laquelle on trouvera $x \mathrel{)} -\frac{1}{2}+\sqrt{3yy+7y+\frac{21}{4}}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $3yy+7y+\frac{21}{4}$, ou $12yy+28y+25$, pour le côté duquel prenant $5 \ldots 4y$, on trouvera $y \mathrel{)} 17$, & par conſéquent $x \mathrel{)} 31$, & les deux quarrez qu'on cherche, ſeront 961, 1156, qui ſatisfont à la Queſtion, car le premier 961 avec ſes parties aliquotes 1, 3, fait ce nombre 993, qui eſt égal à la ſomme des parties aliquotes 1, 2, 4, 17, 34, 68, 578, 289, du ſecond 1156.

QUESTION XXVI.

Trouver en nombres entiers un quarré, tel que ſi on le multiplie par un nombre entier donné, qui ne ſoit pas quarré, & que l'on ajoûte au produit une unité, la ſomme ſoit un nombre quarré.

SI le nombre donné eſt b, & que l'on mette xx pour le quarré qu'on cherche, l'on aura ſelon la condition de la Queſtion, cette Puiſſance à égaler au quarré, $bbx+1$, pour le côté duquel prenant y, en ſorte qu'on ait cette Equation, $bxx+1 \mathrel{)} yy$, on trouvera $x \mathrel{)} \sqrt{\frac{yy-1}{b}}$.

Ainſi l'on a cette Puiſſance à égaler au quarré, $\frac{yy-1}{b}$.

multipliez-la par le quarré bb, pour avoir en entiers cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $byy-b$. Pour cette fin ſuppoſez $y \propto z+1$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $bzz+bz$, pour le côté duquel prenant az, on trouvera $z \propto \frac{2b}{aa-b}$.

Maintenant pour ſçavoir quelle valeur on doit donner à la quantité indéterminée a, afin que la valeur trouvée de z, ſçavoir $\frac{2b}{aa-b}$, ſoit un nombre entier, on conſiderera que puiſque le Numerateur $2b$ eſt un nombre pair, on pourra égaler à 2 le Dénominateur $aa-b$, & alors on trouvera $a \propto \sqrt{b+2}$; & comme on le peut auſſi égaler à 1, & qu'en ce cas on trouve $a \propto \sqrt{b+1}$, l'on connoît que ſi le nombre donné b eſt tel, qu'avec 1 ou 2, il faſſe un nombre quarré, la Queſtion ſera reſoluë.

Suppoſons premierement que le nombre donné b, avec 1, faſſe un nombre quarré, en ſorte que b vaille par exemple 8, auquel cas le quarré qu'on cherche ſera un nombre triangulaire. Alors on trouvera $a \propto 3$, & par conſéquent $z \propto 6$, $y \propto 17$, & $x \propto 6$, & le quarré qu'on cherche ſera 36.

Si vous voulez avoir un autre quarré parce que l'on a trouvé $z \propto 16$, ſuppoſez $z \propto \omega+16$, & alors la Puiſſance $bzz+2bz$, ou $8zz+16z$, ſe changera en celle-ci, $8\omega\omega+27\omega+2304$, laquelle étant égalée au quarré $2304-96c\omega+cc\omega\omega$, dont le côté eſt $48 \ldots c\omega$, on trouvera $\omega \propto \frac{96c+272}{cc-8}$.

Si l'on ſuppoſe $c \propto 3$, l'on trouvera $\omega \propto 560$, & par conſéquent $z \propto 576$, $y \propto 577$, & $x \propto 204$, dont le quarré 41616 ſera celui qu'on cherche. Mais ſi l'on ſuppoſe

ſuppoſe $c \propto 4$, l'on trouvera $\omega \propto 82$, & par conſéquent $z \propto 98$, $y \propto 99$, & $x \propto 35$, dont le quarré 1225 ſera celui qu'on cherche. Que ſi l'on ſuppoſe $c \propto 2$, l'on trouvera $\omega \propto -116$, & par conſéquent $z \propto -100$, $y \propto -99$, & $x \propto 35$, comme auparavant.

Suppoſons maintenant que le nombre donné b avec 2, faſſe un nombre quarré, en ſorte que b vaille par exemple 23, auquel cas on trouvera $a \propto 5$, & par conſéquent $z \propto 23$, $y \propto 24$, & $x \propto 5$, & le quarré qu'on cherche ſera 25.

Pour avoir un autre quarré: parce que l'on a trouvé $z \propto 23$, ſuppoſez $z \propto \omega + 23$, & au lieu de la Puiſſance $bzz+2bz$, ou $23zz+46z$, on aura celle-ci à égaler au quarré, $23\omega\omega+1104\omega+13225$, pour le côté duquel prenant $115-c\omega$, on trouvera $\omega \propto \frac{230c+2304}{cc-23}$.

Si l'on ſuppoſe $c \propto 5$, on trouvera $\omega \propto 1127$, & par conſéquent $z \propto 1150$, $y \propto 1151$, & $x \propto 240$, dont le quarré 57600 ſatisfait à la Queſtion, car étant multiplié par le nombre donné 23, & ajoûtant 1 au produit 1324800, on a ce nombre quarré 1324801, dont le côté eſt 1151.

Comme l'on peut auſſi égaler le même Dénominateur $aa-b$, à -1, ou à -2, & qu'en ce cas on trouve $a \propto \sqrt{b-1}$, ou $a \propto \sqrt{b-2}$, on connoît que ſi le nombre donné b eſt un quarré $+1$, ou $+2$, le Problême ſera reſolu.

Suppoſons premierement que le nombre donné b ſoit un quarré $+1$, en ſorte qu'il vaille par exemple 10: alors on trouvera $a \propto 3$, & par conſéquent $z \propto -20$, $y \propto -19$, & $x \propto 6$, & le quarré qu'on cherche ſera 36.

Si vous voulez un autre quarré: parce que l'on a trouvé $z \propto -20$, l'on ſuppoſera $z \propto \omega - 20$, & la Puiſſance $bzz+2bz$, ou $10zz+20z$, ſe changera en celle-

ci, $10\omega\omega - 380\omega + 3600$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $60 + c\omega$, on trouvera $\omega \gtrless \frac{120c + 380}{10 - cc}$.

Si l'on ſuppoſe $c \gtrless 3$, on trouvera $\omega \gtrless 740$, & par conſéquent $z \gtrless 720$, $y \gtrless 721$, & $x \gtrless 228$, dont le quarré 51984 eſt celui qu'on cherche.

Ou bien parce que l'on a trouvé $x \gtrless 6$, on ſuppoſera $x \gtrless \omega + 6$, & au lieu de la premiere Puiſſance $bxx + 1$, ou $10xx + 1$, on aura celle-ci à égaler au quarré, $10\omega\omega + 120\omega + 361$, pour le côté duquel prenant $19 \ldots c\omega$, on trouvera $\omega \gtrless \frac{38c + 120}{cc - 10}$.

Si l'on ſuppoſe $c \gtrless 3$, on trouvera $\omega \gtrless -234$, & par conſéquent $x \gtrless -228$, & le quarré qu'on cherche, ſera le même qu'auparavant.

Suppoſons maintenant que le nombre donné b ſoit un quarré $+2$, en ſorte qu'on ait par exemple $b \gtrless 11$, & alors on trouvera $a \gtrless 3$, & par conſéquent $z \gtrless -11$, $y \gtrless -10$, & $x \gtrless 3$, & le quarré qu'on cherche, ſera 9.

Si vous voulez un autre quarré: parce que nous avons trouvé $x \gtrless 3$, ſuppoſez $x \gtrless \omega + 3$, & au lieu de la premiere Puiſſance $bxx + 1$, ou $11xx + 1$, vous aurez celle-ci à égaler au quarré, $11\omega\omega + 66\omega + 100$, pour le côté duquel prenant $10 \ldots c\omega$, on trouvera $\omega \gtrless \frac{20c + 66}{cc - 11}$.

Si l'on ſuppoſe $c \gtrless 3$, on trouvera $\omega \gtrless -63$, & par conſéquent $x \gtrless -60$, dont le quarré 3600 eſt celui qu'on cherche.

Mais ſans repeter ici tant de fois la même choſe, nous donnerons un canon général, pour trouver autant de quarrez que l'on voudra par le moyen du premier.

Multipliez

Multipliez le quarré trouvé par le nombre donné, & ajoûtez une unité au produit, pour avoir un nombre quarré, dont le double ſera diminué d'une unité, & le quarré du reſte ſera pareillement diminué d'une unité, pour avoir un autre reſte, qu'il faudra toûjours diviſer par le nombre donné; & le quotient ſera le quarré qu'on cherche, par le moyen duquel on en pourra trouver un troiſiéme, & ainſi enſuite.

Comme ici ayant trouvé le quarré 9, pour le nombre donné 11, ajoûtant 1 au produit de ces deux nombres 9, 11, on aura le nombre quarré 100, dont le double 200 étant diminué de 1, il reſtera 199, dont le quarre 39601 étant pareillement diminué de 1, & le reſte 39600 étant diviſé par le nombre donné 11, on aura le nombre quarré 3600, dont le côté eſt 60, qui ſera le nombre qu'on demande.

Pareillement ſi on multiplie ce ſecond quarré trouvé 3600 par le nombre donné 11, & qu'au produit 39600 on ajoûte 1, on aura cet autre nombre quarré 39601, dont le double 79202 étant diminué de 1, il reſte 79201, dont le quarré 6272798401 étant diviſé par le nombre donné 11, l'on aura ce nombre quarré 570254400, dont le côté eſt 23880, & qui ſatisfait à la Queſtion.

Il eſt évident que lorſque le nombre donné b ſera un nombre pair, on pourra égaler à 4, ou à -4, le même Dénominateur $aa-b$: & parce qu'alors on trouvera $a \propto \sqrt{b+4}$, ou $a \propto \sqrt{b-4}$, l'on connoît que ſi le nombre donné b eſt un nombre pair, tel qu'étant augmenté ou diminué de 4, la ſomme ou le reſte ſoit un nombre quarré, la Queſtion ſera reſoluë.

Suppoſons premierement que le nombre donné b ſoit pair, & qu'avec 4 il faſſe un nombre quarré, en ſorte qu'on ait par exemple $b \propto 12$, & alors on aura $a \propto 4$, & par conſéquent $z \propto 6$, $y \propto 7$, & $x \propto 2$, & le

le quarré qu'on cherche ſera 4, par le moyen duquel & du canon précedent on a trouvé cet autre quarré 9409, dont le côté eſt 97.

Suppoſons maintenant que le nombre donné b ſoit pair, & qu'étant diminué de 4, il reſte un nombre quarré, en ſorte qu'on ait par exemple $b \gtrless 20$; alors on aura $a \gtrless 4$, & par conſéquent $z \gtrless -10$, $y \gtrless -9$, & $x \gtrless 2$, & le quarré qu'on cherche ſera 4, par le moyen duquel & par le canon précedent, on a trouvé cet autre quarré 1296, dont le côté eſt 36.

Il eſt évident auſſi que lorſque le nombre donné b ſera diviſible par 8, on pourra égaler à 8, ou à -8, le même Dénominateur $aa-b$, & qu'alors on trouvera $a \gtrless \sqrt{b+8}$, ou $a \gtrless \sqrt{b-8}$, ce qui fait voir que quand le nombre donné b, ſera diviſible par 8, & qu'étant augmenté ou diminué, du même 8, la ſomme ou le reſte ſera un nombre quarré, la Queſtion ſera reſoluë.

Suppoſons premierement que le nombre donné b avec 8 faſſe un nombre quarré, & qu'il ſoit diviſible par 8, en ſorte qu'on ait par exemple $b \gtrless 56$: alors on trouvera $a \gtrless 8$, & par conſéquent $z \gtrless 14$, $y \gtrless 15$, & $x \gtrless 2$, & le quarré qu'on cherche, ſera 4, par le moyen duquel & par le canon précedent on a trouvé cet autre quarré 3600, dont le côté eſt 60.

Suppoſons que le nombre donné ſoit non ſeulement diviſible par 8, mais encore qu'étant diminué de 8, il reſte un nombre quarré, en ſorte qu'on ait par exemple $b \gtrless 72$: dans ce cas on trouvera $a \gtrless 8$, & par conſéquent $z \gtrless -18$, $y \gtrless -17$, & $x \gtrless 2$, & le quarré qu'on cherche, ſera 4, par le moyen duquel & du canon précedent, on a trouvé cet autre quarré 4624, dont le côté eſt 68.

On pourra trouver pluſieurs autres cas à l'imitation des précedens, auſquels la ſolution ſe pourra faire aiſément en nombres entiers: & comme il ſeroit trop long

de

de les parcourir tous, & que d'ailleurs la ſolution eſt toûjours poſſible en nombres entiers pour quelque nombre entier donné que ce ſoit, pourvû qu'il ne ſoit pas quarré, nous enſeignerons ici une regle générale pour reſoudre cette Queſtion, qui eſt de M^r. De Fermat.

Suppoſons que le nombre donné b vaille par exemple 13, auquel cas la Puiſſance $bxx+1$, ſe changera en celle-ci, $13xx+1$, qu'on égalera au quarré en cette ſorte.

* $13xx+1 \text{) } 9xx+6xy+yy.$

$x \text{) } \frac{3+\sqrt{13yy-4}}{4}.$

$x \oplus y.$

$x \text{) } y+z.$

* $13yy+26yz+13zz+1 \text{) } 16yy+24yz+9zz.$

$y \text{) } \frac{z+\sqrt{39zz+12}}{6}.$

$y \oplus z.$

$y \text{) } z+\omega.$

* $52zz+52z\omega+13\omega\omega+1 \text{) } 49zz+56z\omega+16\omega\omega.$

$z \text{) } \frac{2\omega+\sqrt{13\omega\omega-3}}{9}.$

$z \oplus \omega.$

$z \text{) } \omega+a.$

* $117\omega\omega+156a\omega+52aa+1 \text{) } 121\omega\omega+154a\omega+49aa.$

$\omega \text{) } \frac{a+\sqrt{13aa+4}}{4}.$

$\omega \oplus a.$

$\omega \text{) } a+b.$

* $325aa+390ab+117bb+1 \text{) } 324aa+396ab+121bb.$

ou

* $aa-6ab \text{) } 4bb-1.$

$a \text{) } 3b+\sqrt{13bb-1}.$

$a \oplus 6b.$

$a \text{) } 6b+c.$

* $cc+6bc \text{) } 14bb-1.$

fait connoître que l'on peut ſuppoſer $m \mathrel{)\!(} 1$, & alors on trouvera $d \mathrel{)\!(} 2$, & comme cette valeur eſt un nombre entier, le Problême ſera reſolu: car puiſque nous avons $m \mathrel{)\!(} 1$, & $d \mathrel{)\!(} 2$, en retrogradant, l'on trouvera $c \mathrel{)\!(} 3$, $b \mathrel{)\!(} 5$, $a \mathrel{)\!(} 33$, $\omega \mathrel{)\!(} 38$, $z \mathrel{)\!(} 71$, $y \mathrel{)\!(} 109$, & $x \mathrel{)\!(} 180$, dont le quarré 32400 eſt celui qu'on cherche, par le moyen duquel & du Canon précedent, on a trouvé cet autre quarré, 54587649600, dont le côté eſt 233640.

Le calcul ſera plus abregé, ſi au lieu de prendre le quarré 9, on prend le quarré 16, parce qu'il aproche plus du nombre donné 13: & alors on aura cette

* $13xx+1 \mathrel{)\!(} 16x-8xy+yy.$

$x \mathrel{)\!(} \frac{4y+\sqrt{13yy+1}}{3}.$

$x \oplus 2y.$

$x \mathrel{)\!(} 2y+z$

* $52yy+52yz+13zz+1 \mathrel{)\!(} 49yy+56yz+16zz$

$y \mathrel{)\!(} \frac{2z+\sqrt{13zz-3}}{3}.$

$y \ominus 2z.$

$y \mathrel{)\!(} 2z-\omega$

* $325zz-260z\omega+52\omega\omega+1 \mathrel{)\!(} 324zz-252z\omega+49\omega\omega.$

ou

* $zz-8z\omega \mathrel{)\!(} -3\omega\omega-1.$

$z \mathrel{)\!(} 4\omega+\sqrt{13\omega\omega-1}.$

$z \ominus 8\omega.$

$z \mathrel{)\!(} 8\omega-a.$

* $aa-8a\omega \mathrel{)\!(} -3\omega\omega-1.$

$\omega \mathrel{)\!(} \frac{2a+\sqrt{13aa-3}}{3}.$

$\omega \oplus 2a.$

$\omega \mathrel{)\!(} 2a+b$

* $15aa+8ab \mathrel{)\!(} 12aa+12ab+3bb+1.$

$a \mathrel{)\!(} \frac{2b+\sqrt{13bb+3}}{3}.$

$b \mathrel{)\!(} 1.$

$b \gtrless 1$. $\omega \gtrless 5$. $y \gtrless 71$.
$a \gtrless 2$. $z \gtrless 38$. $x \gtrless 180$.

Equation, $13xx+1 \gtrless 16xx-8xy+yy$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless \frac{4y+\sqrt{13yy+3}}{3}$, où l'on voit que x eſt plus grand que $2y$. C'eſt pourquoi l'on ſuppoſera $x \gtrless 2y+z$, & l'Equation précedente $13xx+1 \gtrless 16xx-8xy+yy$, ſe changera en celle-ci, $52yy+52yz+13zz+1 \gtrless 49yy+56yz+16zz$, dans laquelle on trouvera $y \gtrless \frac{2z+\sqrt{13zz-3}}{3}$, où l'on voit que y eſt moindre que $2z$. C'eſt pourquoi l'on ſuppoſera $y \gtrless 2z-\omega$, & l'Equation précedente $52yy+52yz+13zz+1 \gtrless 49yy+56yz+16zz$, ſe changera en celle-ci, $325zz-260z\omega+52\omega\omega \gtrless 324zz-252z\omega+49\omega\omega$, ou $zz-8z\omega \gtrless -3\omega\omega-1$, dans laquelle on trouvera $z \gtrless 4\omega+\sqrt{15\omega\omega-1}$, où l'on voit que z eſt moindre que 8ω. C'eſt pourquoi l'on ſuppoſera $z \gtrless 8\omega-a$, & au lieu de l'Equation précedente $zz-8z\omega \gtrless -3\omega\omega-1$, on aura celle-ci, $aa-8a\omega \gtrless -3\omega\omega-1$, dans laquelle on trouvera $\omega \gtrless \frac{4a+\sqrt{13aa-3}}{3}$, où l'on voit que ω eſt plus grand que $2a$. C'eſt pourquoi l'on ſuppoſera $\omega \gtrless 2a+b$, & l'Equation précedente $aa-8a\omega \gtrless -3\omega\omega-1$, ſe changera en celle-ci, $15aa+8ab \gtrless 12aa+12ab+3bb+1$, dans laquelle on trouvera $a \gtrless \frac{2b+\sqrt{3bb+3}}{3}$, & l'on connoîtra par un raiſonnement ſemblable au précedent, que l'on peut ſuppoſer $b \gtrless 1$, & qu'alors on trouvera $a \gtrless 2$, & par conſéquent $\omega \gtrless 5$, $z \gtrless 38$, $y \gtrless 71$, & $x \gtrless 180$, comme auparavant.

Si le nombre donné b vaut 21 ; l'operation ſe fera comme nous venons de dire, & comme vous voyez

dans l'exemple ſuivant, où il arrive que dans le ter-

* $21xx+1 \square 25xx-10xy+yy$

$x \square \frac{5+\sqrt{9yy+4}}{4}$.

$x \oplus 2y$.

$x \square 2y+z$.

* $84yy+84yz+21zz+1 \square 81yy+90yz+25zz$

$y \square \frac{z+\sqrt{7zz-1}}{3}$.

$y \oplus 2z$.

$y \square 2z+\omega$.

* $525zz+420z\omega+84\omega\omega+1 \square 529zz+414z\omega+81\omega\omega$.

$z \square \frac{3\omega+\sqrt{21\omega\omega+4}}{4}$.

$\omega \square 1$. $y \square 5$.

$z \square 2$. $x \square 12$.

144. *Quarré qu'on cherche.*

me irrationnel $\sqrt{21\omega\omega+4}$ de la valeur trouvée de z, la ſomme des unitez fait le nombre quarré 25, dont le côté eſt 5, & que par conſéquent on peut ſuppoſer $\omega \square 1$, & alors on trouvera $z \square 2$, & par conſéquent $y \square 5$, & $x \square 12$, dont le quarré 144 eſt celui qu'on cherche, par le moyen duquel & du canon précedent on a trouvé cet autre quarré 1742400, dont le côté eſt 1320.

Comme cette methode eſt très-belle, nous en donnerons encore ici un exemple pour le nombre donné $b \square 19$, où il arrive dans le terme irrationnel $\sqrt{19aa-3}$

* $19xx+1 \square 16xx+8xy+yy$.

$x \square \frac{4y+\sqrt{19yy-3}}{3}$.

$x \ominus 3y$.

$x \square 3y-z$.

* $171yy-114yz+19zz+1 \square 169yy-104yz+16zz$.

$y \square \frac{5z+\sqrt{19zz-2}}{2}$.

$y \oplus 4z$.

$y \square 4z+\omega$.

* 2299zz

* $2299zz+125+z\omega+171\omega\omega+1 \text{ ☐ } 2304zz+1248z\omega+169\omega\omega$.

ou

* $5zz-6z\omega \text{ ☐ } 2\omega\omega+1$.

$z \text{ ☐ } \frac{3\omega+\sqrt{19\omega\omega+5}}{5}$.

$z \oplus \omega$.

$z \text{ ☐ } \omega+a$

* $-\omega\omega+4a\omega+5aa \text{ ☐ } 2\omega\omega+1$.

$\omega \text{ ☐ } \frac{2a+\sqrt{19aa-3}}{3}$.

$a \text{ ☐ } 1$. $y \text{ ☐ } 14$.
$\omega \text{ ☐ } 2$. $x \text{ ☐ } 39$.
$z \text{ ☐ } 3$. 1521. *Quarré cherché.*

de la valeur trouvée de ω, que la ſomme des unitez fait le nombre quarré 16, dont le côté eſt 4, & que par conſéquent on peut ſuppoſer $a \text{ ☐ } 1$, & alors on trouvera $\omega \text{ ☐ } 2$, & par conſéquent $z \text{ ☐ } 3$, $y \text{ ☐ } 14$, & $x \text{ ☐ } 39$, dont le quarré 1521 eſt celui qu'on cherche, par le moyen duquel & par le canon précedent, on a trouvé cet autre quarré, 175827600, dont le côté eſt 13260.

Cette methode ſe peut apliquer à un nombre donné autre que l'unité, pourvû qu'il ſoit quarré, comme pour *trouver un quarré tel que ſi on le multiplie par le nombre donné* 29, *& qu'au produit on ajoûte le quarré donné* 4, *la ſomme ſoit un nombre quarré.*

En mettant comme auparavant, xx pour le quarré qu'on cherche, on aura ſelon la condition de la Queſtion, cette Puiſſance à égaler au quarré, $29xx+4$, ce qui ſe fera par une methode ſemblable à la précedente, comme vous voyez dans l'exemple ſuivant, où l'on voit que dans le terme irrationnel $\sqrt{29zz+20}$ de

* $29xx+4 \text{ ☐ } 25xx+10xy+yy$.

$x \text{ ☐ } \frac{5y+\sqrt{20yy-16}}{4}$.

$x \oplus 2y$.

$x \propto 2y+z$.

$\square$ $116yy+116yz+29zz+4 \propto 121yy+110yz+25zz$.

$y \propto \frac{3z+\sqrt{29zz+20}}{5}$.

$z \propto 1$. $x \propto 5$.

$y \propto 2$. 25. *Quarré qu'on cherche.*

la valeur trouvée de y, la ſomme 49 des unitez a ſa Racine quarrée 7, & que par conſéquent on peut ſuppoſer $z \propto 1$, & alors on trouvera $y \propto 2$, & $x \propto 5$, & le quarré qu'on cherche, ſera 25.

Si vous voulez un autre quarré, ſuppoſez $x \propto y+5$, & au lieu de la Puiſſance $29xx+4$, vous aurez celle-ci à égaler au quarré, $29yy+290y+729$, pour le côté duquel prenant $27...ay$, on trouvera $y \propto \frac{5+a+290}{aa-29}$.

Si l'on ſuppoſe $a \propto 5$, qui eſt le côté du quarré trouvé, l'on trouvera $y \propto -140$, & par conſéquent $x \propto -135$, dont le quarré 18225 ſera celui qu'on cherche.

Pareillement ſi l'on donne le nombre 61, & le quarré 9, l'operation ſera telle que vous la voyez dans l'exemple ſuivant, où il arrive que dans le terme

$\square$ $61xx+9 \propto 64xx-16xx+yy$.

$x \propto \frac{8y+\sqrt{61yy+9}}{3}$.

$x \oplus 5y$.

$x \propto 5y+z$.

$\square$ $1525yy+610yz+61zz+9 \propto 1521yy+624yz+64zz$.

$y \propto \frac{7z+\sqrt{61zz-36}}{+}$.

$z \propto 1$. $x \propto 16$.

$y \propto 3$. 256. *Quarré qu'on cherche.*

irrationnel $\sqrt{61zz-36}$, la ſomme 25 des unitez a ſa Racine quarrée 5, & que par conſéquent on peut ſuppoſer $z \propto 1$, & alors on trouvera $y \propto 3$, & $x \propto 16$, dont le quarré 256 ſatisfera à la Queſtion.

QUES-

QUESTION XXVII.

Trouver en nombres un triangle rectangle, tel que ſi de l'un des deux côtez on ôte le quarré de l'hypotenuſe, & reciproquement de l'hypotenuſe le quarré du même côté, il reſte deux nombres quarrez.

NOus trouverons auparavant, * *deux nombres tels que ſi de châcun on ôte le quarré de l'autre, les deux reſtes ſoient des nombres quarrez.* Ce Problême a été reſolu en pluſieurs manieres dans nôtre Diophante, & ailleurs : c'eſt pourquoi ſans nous amuſer à les repeter ici, nous expliquerons ſeulement celle qui convient à nôtre ſujet.

Si l'on met $\frac{bb,\ aa+bb}{xx+yy}$, pour les deux nombres qu'on cherche, l'on aura en entiers, ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$bbxx+bbyy-a^4-2aabb-b^4.$$
$$aaxx+bbxx+aayy+bbyy-b^4.$$

Egalez la premiere $bbxx+bbyy-a^4-2aabb-b^4$, au quarré $bbyy$, pour avoir $x \propto \frac{aa}{b}+b$, & la ſeconde $aaxx+bbxx+aayy+bbyy-b^4$, ſe changera en celle-ci, $\frac{a^6}{bb}+3a^4+3aabb+aayy+bbyy$, laquelle étant égalée au quarré $\frac{a^6}{bb}+4a^4+4aabb$, dont le côté eſt $\frac{a^3}{b}+2ab$, on trouvera $y \propto a$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{b^4,\ aabb+b^4}{a^4+3aabb+b^4}$$

* *Voyez Queſt. 12. des Doubles Egalitez.*

Si l'on prend le plus petit de ces deux nombres ainſi trouvez pour l'un des deux côtez du triangle rectangle qu'on cherche, ou ſeulement le Numerateur b^4, & $aabb+b^4$ pour l'hypotenuſe: ou bien bb, $aa+bb$, pour le côté & pour l'hypotenuſe, la difference de leurs quarrez ſera $a^4+2aabb$, ou $aa+2bb$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $a \ldots \frac{bc}{d}$, on trouvera en entiers $a \gtrdot cc-2dd$, & $b \gtrdot 2cd$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſera de cette grandeur,

$$\frac{4c^6dd-16ccd^6,\ 16c^4d^4,\ 4c^6dd+16ccd^6.}{c^8+4c^6dd-8c^4d^4+16ccd^6+16d^8.}$$

Si l'on ſuppoſe $c \gtrdot 1$, & $d \gtrdot 1$, le triangle rectangle qu'on cherche, ſera tel $\frac{12,26,20}{29}$, qui ſatisfait à la Queſtion: car ſi de l'hypotenuſe $\frac{20}{29}$, on ôte le quarré $\frac{256}{841}$, du côté $\frac{16}{29}$, il reſte ce nombre quarré $\frac{144}{841}$, dont le côté eſt $\frac{12}{29}$, & ſi du même côté $\frac{16}{29}$, on ôte le quarré $\frac{400}{841}$ de l'hypotenuſe $\frac{20}{29}$, il reſte cet autre nombre quarré $\frac{64}{841}$, dont le côté eſt $\frac{8}{29}$.

QUESTION XXVIII.

Trouver en nombres un triangle rectangle, dont l'hypotenuſe ſoit l'aire d'un autre triangle rectangle.

PArce que l'aire de ce triangle rectangle, $\frac{a^4-b^4,\ 2aabb,\ a^4+b^4}{ab}$, eſt a^4-b^4, mettez cette aire a^4-b^4, pour l'aire du triangle rectangle qu'on cherche, & $aa-bb$ pour l'un des deux nombres generateurs, dont le quarré $a^4-2aabb+b^4$ étant ôté de l'hypotenuſe ſuppoſée a^4-b^4, il reſtera $2aabb-2b^4$ pour le quarré de l'autre nombre generateur. Ainſi nous aurons cette

Puiſſance

Puiſſance à égaler au quarré $2aabb-2b^4$, ou $2aa-2bb$. Pour cette fin ſuppoſez $a \mathrel{\text{⌢}} x+b$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $xx+4bx$, pour le côté duquel prenant $\frac{cx}{d}$, l'on trouvera en entiers $x \mathrel{\text{⌢}} cc+2dd$, & $b \mathrel{\text{⌢}} cc-2dd$, & les deux nombres generateurs du triangle rectangle qu'on cherche, ſeront en moindres termes de cette grandeur $2cd, cc-2dd$. C'eſt pourquoi le triangle rectangle qu'on cherche, ſera tel,

$$4c^3d-8cd^3,\ c^4-8ccdd+4d^4,\ c^4+4d^4.$$

dont l'hypotenuſe c^4+4d^4 eſt l'aire de cet autre triangle rectangle,

$$\frac{8c^6dd+32ccd^6,\ c^8-8c^4d^4+16d^8,\ c^8+24c^4d^4+16d^8}{2c^5d-8cd^5}.$$

Si l'on ſuppoſe $c \mathrel{\text{⌢}} 3$, & $d \mathrel{\text{⌢}} 1$, le triangle rectangle qu'on cherche, ſera 84, 13, 85, dont l'hypotenuſe 85 eſt l'aire de cet autre triangle rectangle $\frac{6120.5929.8521}{462}$.

Remarque.

Comme l'hypotenuſe c^4+4d^4 du triangle trouvé eſt compoſée de ces deux quarrez c^4, $4d^4$, dont les côtez ſont cc, $2dd$, ſi l'on forme des deux mêmes côtez cc, $2dd$, cet autre triangle rectangle,

$$c^4-4d^4,\ 4ccdd,\ c^4+4d^4.$$

il ſatisfera auſſi à la Queſtion, puiſqu'il a la même hypotenuſe c^4+4d^4 : & parce que nous avons ſuppoſé $c \mathrel{\text{⌢}} 3$, & $d \mathrel{\text{⌢}} 1$, ce ſecond triangle rectangle ſera en nombres de cette grandeur, 36, 77, 85.

Ainſi vous voyez que par cette Queſtion, l'on *trouve deux triangles rectangles de diverſe eſpece, où l'hypotenuſe eſt dans chacun un même nombre égal à l'aire d'un troiſiéme triangle rectangle.* Mais ces deux triangles rectangles

ſe reduiront à celui-ci, 3, 4, 5, en ſuppoſant $a \gtrless 1$, & $d \gtrless 1$.

On peut faire que l'hypotenuſe du triangle rectangle qu'on cherche ſoit égale à l'aire d'un triangle rectangle donné : comme ſi l'on donne ce triangle rectangle 3, 4, 5, dont l'aire eſt 6, en mettant cette aire 6 pour l'hypotenuſe du triangle rectangle qu'on cherche, & x, y, pour ſes deux côtez, on aura cette Equation, $xx+yy \gtrless 36$, dans laquelle on trouvera $x \gtrless \sqrt{36-yy}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $36-yy$, pour le côté duquel prenant $6 \ldots \frac{ay}{b}$, on trouvera $y \gtrless \frac{12ab}{aa+bb}$, & par conſéquent $x \gtrless \frac{6aa-6bb}{aa+bb}$, & le triangle rectangle qu'on cherche ſera

$$\frac{6aa-6bb,\ 12ab,\ 6aa+6bb}{aa+bb}.$$

Si l'on ſuppoſe $a \gtrless 2$, & $b \gtrless 1$, le triangle rectangle qu'on cherche, ſera $\frac{18, 24, 30}{5}$: & ſi l'on ſuppoſe $a \gtrless 3$, & $b \gtrless 2$, le triangle rectangle qu'on cherche, ſera $\frac{30, 72, 78}{13}$, &c.

QUESTION XXIX.

Trouver en nombres un triangle rectangle, où l'hypotenuſe & l'un des deux côtez, ſoient chacun l'aire d'un triangle rectangle.

PArce que a^4-1 eſt l'aire de ce triangle rectangle $\frac{a^4-1,\ 2aa,\ a^4+1}{a}$, & que l'aire de cet autre triangle rectangle $bb-1$, $2b$, $bb+1$, eſt b^3-b, mettez a^4-1 pour l'hypotenuſe du triangle rectangle qu'on cher-

che,

che, & b^3-b pour l'un des deux côtez, dont le quarré b^6-2b^4+bb étant ôté du quarré a^8-2a^4+1 de l'hypotenuſe ſuppoſée a^4-1, l'on aura $a^8-2a^4+1-b^6+2b^4-bb$, pour le quarré de l'autre côté. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $a^8-2a^4+1-b^6+2b^4-bb$. Pour cette fin, ſuppoſez $b \propto x+1$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $a^8-a^6-6a^5-15a^4-12a^3-4aa+1$, pour le côté duquel prenant $1-2aa+a^4$, l'on trouvera $a \propto 4$, & par conſéquent $b \propto 5$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſera 120, 225, 255, dont l'hypotenuſe 255 eſt l'aire de ce triangle rectangle, $\frac{255,\ 32,\ 257}{4}$, & dont le côté 120 eſt l'aire de cet autre triangle rectangle 10, 24, 26.

Ou bien parce que c^4+4d^4 eſt l'aire de ce triangle rectangle $\frac{8c^6dd+32ccd^6,\ c^8-8c^4d^4+16d^8,\ c^8+24c^4d^4}{16d^8}$ + $\frac{}{2c^5d-8cd^5}$, comme nous avons reconnu dans la Queſtion précedente, & que c^4-d^4 eſt l'aire de cet autre triangle rectangle $\frac{c^4-d^4,\ 2ccdd,\ c^4+d^4}{cd}$, l'on pourra mettre c^4+4d^4 pour l'hypotenuſe du triangle rectangle qu'on cherche, & c^4-d^4 pour l'un des deux côtez, dont le quarré $c^8-2c^4d^4+d^8$ étant ôté du quarré $c^8+8c^4d^4+16d^8$ de l'hypotenuſe ſuppoſée c^4+4d^4, l'on aura $10c^4d^4+15d^8$, pour le quarré de l'autre côté. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $10c^4d^4+15d^8$, ou $10c^4+15d^4$; ce qui eſt facile, parce que la ſomme 25 des unitez eſt un nombre quarré, dont le côté eſt 5. Suppoſez donc $d \propto x+c$, & au lieu de la Puiſſance précedente $10c^4+15d^4$, vous aurez celle-ci à égaler au quarré, $15x^4+60cx^3+90ccxx+60c^3x+25c^4$, pour le côté duquel prenant $5cc+6cx+\frac{27xx}{5}$.

l'on

l'on trouvera en entiers $c \gtrless 59$, & $x \gtrless -20$, & par conséquent $d \gtrless 39$, & le triangle rectangle qu'on cherche, sera

18989685, 9803920, 21371125.

QUESTION XXX.

Trouver en nombres un triangle rectangle, où chacun des deux côtez soit l'aire d'un autre triangle rectangle.

A Cause de ce qui a été dit au commencement de la Question précedente, mettez a^4-1, b^3-b, pour les deux côtez du triangle rectangle qu'on cherche, & ajoûtez ensemble leurs quarrez a^8-2a^4+1, b^6-2b^4+bb, & la somme $a^8-2a^4+1+b^6-2b^4+bb$, sera le quarré de l'hypotenuse du même triangle. Ainsi nous aurons cette Puissance à égaler au quarré, $a^8-2a^4+1+b^6-2b^4+bb$ Pour cette fin, supposez $b \gtrless a+1$, & vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $a^8+a^6+6a^5+11a^4+12a^3+4aa+1$, pour le côté duquel prenant $1+2aa+a^4$, l'on trouvera $a \gtrless 3$, & par conséquent $b \gtrless 4$, & le triangle rectangle qu'on cherche, sera 80, 60, 100, dont le premier côté 80 est l'aire de ce triangle rectangle $\frac{18, 80, 82}{3}$, & l'autre côté 60 est l'aire de cet autre triangle rectangle 8, 15, 17.

Remarque.

Si l'on divise par 4, qui est un nombre quarré, le triangle rectangle trouvé 80, 60, 100, l'on aura en moindres termes cet autre triangle rectangle 20, 15, 25, qui satisfait aussi aux conditions de la Question, car le premier côté 20, est l'aire de ce triangle rectangle $\frac{9, 40, 41}{3}$

$\frac{9, 40, 41}{3}$, & l'autre côté 15 eſt l'aire de cet autre triangle rectangle $\frac{8. 15. 17}{2}$.

Pour avoir un autre triangle, formez de x, & de $x+y$ ce triangle rectangle, $2xx+2xy$, $yy+2xy$, $2xx+2xy+yy$, dont l'aire eſt $3xxyy+2x^3y+xy^3$; & de x, & de $x...y$, cet autre triangle rectangle $2xx-2xy$, $yy-2xy$, $2xx-2xy+yy$, dont l'aire eſt $3xxyy-2x^3y-xy^3$; & mettez ces deux aires $3xxyy+2x^3y+xy^3$, $3xxyy-2x^3y-xy^3$, pour les deux côtez du triangle rectangle qu'on cherche, dont l'hypotenuſe ſera $xy\sqrt{26xxyy+8x^4+2y^4}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $26yyxx+8x^4+2y^4$, ce qui eſt facile, parce que la ſomme 36 des unitez a ſa Racine quarrée 6. Suppoſez donc $x \propto y+z$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $36y^4+84y^3z+74yyzz+32yz^3+8z^4$, pour le côté duquel prenant $6yy+7yz+\frac{25zz}{11}$, l'on trouvera $y \propto 31$, & $z \propto -24$, & par conſéquent $x \propto 7$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſera.

371070, 88536, 381486.

dont le premier côté 371070 eſt l'aire de ce triangle rectangle 532, 1395, 1493, & l'autre côté 88536 eſt l'aire de cet autre triangle rectangle 336, 527, 625.

Ou bien mettez $3xxyy-2x^3y-xy^3$, $6xxyy$, pour les deux côtez du triangle rectangle qu'on cherche, le premier $3xxyy-2x^3y-xy^3$, étant l'aire de ce triangle rectangle $2xx-2xy$, $yy-2xy$, $2xx-2xy+yy$, & le ſecond $6xxyy$ étant l'aire de cet autre triangle rectangle, $3xy$, $4xy$, $5xy$. La ſomme des quarrez de ces deux côtez donnera $xxy^6-6x^3y^5+49x^4y^4-12x^5y^3+4x^6yy$, pour le quarré de l'hypotenuſe. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $xxy^6-6x^3y^5+49x^4y^4-12x^5y^3+4x^6yy$, pour le côté duquel prenant $xy^3-3xxyy+20x^3y$, l'on trouvera en entiers $x \propto 3$, & $y \propto 11$, & le

le triangle rectangle qu'on cherche ſera 1320, 6534, 6666, dont le premier côté 1320 eſt l'aire de ce triangle rectangle 48, 55, 73, & l'autre côté 6534 eſt l'aire de cet autre triangle rectangle, 99, 132, 165.

QUESTION XXXI.

Trouver en nombres un triangle rectangle, dont chaque côté & l'hypotenuſe ſoit l'aire d'un triangle rectangle.

NOus trouverons premierement *un triangle rectangle* x, y, z, *tel que la ſomme* $z+y$ *de l'hypotenuſe* z *& du côté* y, *ſoit quadruple de l'autre côté* x. Ainſi nous aurons cette Equation, $z+y \propto 4x$, & afin que le triangle ſoit rectangle, nous aurons cette autre Equation, $xx+yy \propto zz$.

Dans la premiere Equation $z+y \propto 4x$, l'on trouvera $z \propto 4x-y$, & au lieu de la ſeconde Equation, $xx+yy \propto zz$, l'on aura celle-ci, $xx+yy \propto 16xx-8xy+yy$, dans laquelle on trouvera en entiers $x \propto 8$, & $y \propto 15$, & par conſéquent $z \propto 17$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſera 8, 15, 17, par le moyen duquel on trouvera le triangle rectangle qu'on cherche dans la Queſtion, en cette ſorte.

Formez de $6x$, & de $z-2x$, ou de 48, & 1, ce triangle rectangle 96, 2303, 2305, dont l'aire 110544, eſt l'un des deux côtez du triangle rectangle qu'on cherche. Formez de $4x+y$, & de $4x-2y$, ou de 47, & 2, cet autre triangle rectangle 188, 2205, 2213, dont l'aire 207270 eſt l'autre côté du triangle rectangle qu'on cherche. Enfin formez de $z+4x$, & de $2z-4x$, ou de 49, & 2, ce troiſiéme triangle rectangle 196, 2397, 2405, dont l'aire 234906 eſt l'hypotenuſe du triangle rectangle qu'on cherche. Ainſi le triangle rectangle qu'on cherche, ſera 110544, 207270, 234906.

Ce

Ce triangle rectangle eſt de Monſieur De Fermat, & les deux ſuivans ſont du R. P. De Billy. Le premier eſt 330, 440, 550, dont le premier côté 330 eſt l'aire de ce triangle rectangle 11, 60, 61: l'autre côté 440 eſt l'aire de cet autre triangle rectangle $\frac{40,\ 193,\ 202}{3}$: & l'hypotenuſe 550 eſt l'aire de ce troiſiéme triangle rectangle, $\frac{99,\ 4900,\ 4901}{21}$. Le ſecond eſt 210, 720, 750, dont le côté 210 eſt l'aire de ce triangle rectangle 12, 35, 37: l'autre côté 720 eſt l'aire de cet autre triangle rectangle 18, 80, 82: & l'hypotenuſe 750 eſt l'aire de ce troiſiéme triangle rectangle 25, 60, 65.

QUESTION XXXII.

Trouver en nombres un triangle rectangle, dont chacun des deux côtez & l'hypotenuſe ſoit l'hypotenuſe d'un triangle rectangle.

FOrmez de x & de y, de z & de ω, & de y & de z, ces trois triangles rectangles

$$2xy,\ xx...yy,\ xx+yy.$$
$$2z\omega,\ zz...\omega\omega,\ zz+\omega\omega.$$
$$2yz,\ yy...zz,\ yy+zz.$$

& mettez les hypotenuſes $xx+yy$, $zz+\omega\omega$, $yy+zz$, pour le triangle rectangle qu'on cherche, & ſi l'on veut que $yy+zz$ ſoit l'hypotenuſe de ce triangle rectangle, on égalera ſon quarré $y^4+2yyzz+z^4$ à la ſomme $x^4+2xxyy+y^4+z^4+2zz\omega\omega+\omega^4$ des quarrez des deux côtez $xx+yy$, $zz+\omega\omega$, & alors on trouvera y $\surd\frac{x^4+2zz\omega\omega+\omega^4}{2zz-2xx}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré; $\frac{x^4+2zz\omega\omega+\omega^4}{2zz-2xx}$, ce qui ſe fera en égalant ſéparément au quarré le Numerateur $x^4+2zz\omega\omega+\omega^4$, & le Dénominateur $2zz-2xx$, en cette ſorte.

Premie-

Premierement pour égaler au quarré le Dénominateur $2zz-2xx$, ſuppoſez $z \propto u+x$, & au lieu de $2zz-2xx$, vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $2uu+4xu$, pour le côté duquel prenant $\frac{2au}{b}$, on trouvera en entiers $x \propto 2aa-bb$, & $u \propto 2bb$, & par conſéquent $z \propto 2aa+bb$, & au lieu du Numerateur $x^4+2zzz\omega\omega+\omega^4$, l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $16a^8-32a^6bb+24a^4b^4-8aab^6+b^8+8a^4\omega\omega+8aabb\omega\omega+2b^4\omega\omega+\omega^4$, pour le côté duquel prenant $\omega\omega+b^4+4aabb...4a^4$, l'on trouvera $\omega \propto \sqrt{\frac{b^6-aab^4}{aa}}$.

Ainſi l'on aura encore cette Puiſſance à égaler au quarré, $\frac{b^6-aab^4}{aa}$, ou $bb-aa$, pour le côté duquel prenant $b...\frac{ac}{d}$, l'on trouvera en entiers $a \propto 2cd$, & $b \propto cc+dd$, &c.

Si l'on ſuppoſe $c \propto \sqrt{\frac{1}{2}}$, & $d \propto \sqrt{\frac{1}{2}}$, l'on trouvera

$a \propto 3.$	$aa \propto 9.$
$b \propto 5.$	$bb \propto 25.$
$x \propto 3780$	$xx \propto 14288400.$
$y \propto 20809$	$yy \propto 433014481.$
$z \propto 23220$	$zz \propto 539168400.$
$\omega \propto 18000$	$\omega\omega \propto 324000000.$

& le triangle rectangle qu'on cherche, ſera

447302881, 863168400, 972182881.

dont les nombres générateurs ſont 16200, 26641, & dont le premier côté 447302881 eſt l'hypotenuſe de ce triangle rectangle,

157316040, 418726081, 447302881.

l'autre côté 863168400 eſt l'hypotenuſe de cet autre triangle rectangle,

83592000, 215168400, 863168400.

&

& l'hypotenuſe 972182881 eſt l'hypotenuſe de ce troiſiéme triangle rectangle,

966369960, 106153919, 972182881.

Mais ſi l'on ſuppoſe $c \propto 1$, & $d \propto 2$, l'on trouvera

$a \propto 4$.	$aa \propto 16$.
$b \propto 5$.	$bb \propto 25$.
$x \propto 8960$.	$xx \propto 80281600$.
$y \propto 24841$.	$yy \propto 617075281$.
$z \propto 72960$.	$zz \propto 5323161600$.
$\omega \propto 24000$.	$\omega\omega \propto 576000000$.

& le triangle rectangle qu'on cherche, ſera

697356881, 5899161600, 5940236881.

dont les nombres générateurs ſont 51200, 57609, & dont le premier côté 697356881 eſt l'hypotenuſe de ce triangle rectangle,

445150720, 536793681, 697356881.

l'autre côté 5899161600 eſt l'hypotenuſe de cet autre triangle rectangle,

3502080000, 4747161600, 5899161600.

& l'hypotenuſe 5940236881 eſt l'hypotenuſe de ce troiſiéme triangle rectangle,

3624798720, 4706086319, 5940236881.

On peut faire que l'un des deux côtez du triangle rectangle qu'on cherche, ſoit un nombre quarré, ſçavoir en mettant xx pour ce côté, $yy+zz$ pour l'autre côté, & $xx+zz$ pour l'hypotenuſe, & alors on aura cette Equation, $x^4+y^4+2yyzz+z^4 \propto x^4+2xxzz+z^4$, dans laquelle on trouvera $xx \propto \frac{\frac{1}{2}y^4+yyzz}{zz}$, & l'on aura en entiers & en moindres termes cette Puiſſance à égaler au quarré, $\frac{1}{2}yy+zz$, pour le côté duquel prenant $z \ldots \frac{ay}{b}$, l'on trouvera $y \propto 2ab$, & $z \propto aa-\frac{1}{2}bb$, & par conſéquent $x \propto \frac{2a^3b+ab^3}{aa-\frac{1}{2}bb}$, ou bien en entiers

on

on aura $x \propto 2a^3b+ab^3$, $y \propto 2a^3b-ab^3$, & $z \propto a^4-aabb+\frac{1}{2}b^4$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſera tel,

$$4a^6bb+4a^4b^4+aab^6.$$
$$a^8+2a^6bb-\tfrac{5}{2}a^4b^4+\tfrac{1}{2}aab^6+\tfrac{1}{16}b^8.$$
$$a^8+2a^6bb+\tfrac{11}{2}a^4b^4+\tfrac{1}{2}aab^6+\tfrac{1}{16}b^8.$$

dont les nombres générateurs ſont $2aabb$, $a^4+aabb+\frac{1}{2}b^4$, & dont le premier côté $4a^6bb+4a^4b^4+aab^6$, a ſa Racine quarrée $2a^3b+ab^3$, ce qui fait qu'étant quarré, il peut être diviſé en deux autres quarrez, & ainſi être conſideré comme l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, laquelle eſt toûjours compoſée de deux quarrez, comme étant la ſomme des quarrez des deux nombres générateurs, &c.

Si l'on ſuppoſe $a \propto 3$, & $b \propto 2$, le triangle rectangle ſera 17424, 9457, 19825.

QUESTION XXXIII.

Trouver trois nombres triangulaires, dont la ſomme ſoit un nombre triangulaire.

AYant trouvé ces deux nombres triangulaires 15, 21, dont les côtez ſont 5, 6, & dont la ſomme 36 eſt un nombre triangulaire, comme il ſera enſeigné à la *Queſt.* 4. *des Doubles Egalitez ;* mettez 15, 21, $\frac{xx-x}{2}$, pour les trois nombres triangulaires qu'on cherche. Leur ſomme eſt $\frac{xx-x}{2}+36$, qu'il faut égaler au triangle, ſi on l'égale au triangle $\frac{xx+x}{2}$, l'on trouvera $x \propto 36$, & les trois nombres triangulaires qu'on cherche, ſeront 630, 15, 21, dont les côtez ſont 35, 5, 6, & dont la ſomme 666 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 36.

Pour avoir une ſolution plus générale, il faut autrement

trement égaler au triangle la ſomme précedente $\frac{xx-x}{2}$ $+36$, ſçavoir en la multipliant par 8, & en ajoûtant 1 au produit $4xx-4x+288$, pour avoir en ſa place cette Puiſſance à égaler au quarré, $4xx-4x+289$, pour le côté duquel prenant $17...\frac{ax}{b}$, l'on trouvera $x \mathrel{)\!(} \frac{3+ab-4bb}{aa-4bb}$. C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $a \mathrel{)\!(} 1$, & $b \mathrel{)\!(} 1$, l'on trouvera $x \mathrel{)\!(} -10$, & les trois nombres triangulaires qu'on cherche, ſeront 55, 15, 21, dont les côtez ſont 10, 5, 6, & dont la ſomme 91 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 13. Mais ſi l'on ſuppoſe $a \mathrel{)\!(} 5$, & $b \mathrel{)\!(} 2$, l'on trouvera $x \mathrel{)\!(} 36$, comme auparavant. Que ſi l'on ſuppoſe $a \mathrel{)\!(} 4$, & $b \mathrel{)\!(} 1$, l'on trouvera $x \mathrel{)\!(} 11$, & les trois nombres triangulaires qu'on cherche, ſeront 55, 15, 21, dont les côtez ſont 10, 5, 6, & dont la ſomme 91 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 13, comme auparavant.

Pour trouver le côté d'un nombre triangulaire donné; *Multipliez ce nombre triangulaire toûjours par* 8, *& ayant ajoûté l'unité au produit, ôtez la même unité de la Racine quarrée de la ſomme, & la moitié du reſte ſera le côté qu'on cherche.*

Si vous voulez que les côtez des trois nombres triangulaires qu'on cherche, ſoient en proportion arithmetique, mettez a, b, c, pour les côtez de ces nombres triangulaires, leſquels par conſéquent ſeront $\frac{aa+a}{2}, \frac{bb+b}{2}, \frac{cc+c}{2}$; dont la ſomme eſt $\frac{aa+bb+cc+a+b+c}{2}$ qu'il faut rendre triangulaire. Pour cette fin on la multipliera par 8, & on ajoûtera 1 au produit, pour avoir en ſa place cette Puiſſance à égaler au quarré, $4aa+4bb+4cc+4a+4b+4c+1$, ce qui eſt facile, parce

que la ſomme 25 des unitez eſt un nombre quarré, dont le côté eſt 5: & comme les trois côtez doivent être en proportion arithmetique, ſuppoſez $a \propto x+1$, $b \propto 2x+1$, & $c \propto 3x+1$, & alors vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $56xx+72x+25$, pour le côté duquel prenant $5 \ldots \frac{dx}{m}$, l'on trouvera $x \propto \frac{72mm+10dm}{dd-56mm}$.

C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $d \propto 8$, & $m \propto 1$, l'on trouvera $x \propto 19$; & par conſéquent $a \propto 20$, $b \propto 39$, & $c \propto 58$, & les trois nombres triangulaires qu'on cherche, ſeront 210, 780, 1711, dont les côtez 26, 39, 58, ſont en proportion arithmetiqne, & dont la ſomme 2701 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 73.

On peut trouver des ſolutions infinies, parce que l'on peut donner aux deux quantitez indéterminées d, m, une infinité d'autres valeurs, en ſorte que la valeur trouvée de x, ſçavoir $\frac{72mm+10dm}{dd-56mm}$, ſoit toûjours un nombre entier; ce qui ſe fera en égalant à 1, le Dénominateur $dd-56mm$, & alors on trouvera $d \propto \sqrt{56mm+1}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $56mm+1$, pour le côté duquel prenant $1 \ldots \frac{pm}{n}$, l'on trouvera $m \propto \frac{2pn}{pp-56nn}$, & par conſéquent $d \propto \frac{pp+56nn}{pp-56nn}$, &c.

Si l'on ſuppoſe $p \propto 8$, & $n \propto 1$, l'on trouvera $m \propto 2$, $d \propto 15$, $x \propto 588$, $a \propto 589$, $b \propto 1177$, & $c \propto 1765$, & les trois nombres triangulaires qu'on cherche, ſeront 173755, 693253, 1558495, dont les côtez 589, 1177, 1765, ſont en proportion arithmetique, & dont la ſomme 2425503 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 2202.

On

On pourra de la même façon égaler à 1, le Dénominateur $pp-56nn$, pour avoir une autre ſolution, & ainſi à l'infini. Mais on aura plus facilement une autre ſolution, par le moyen de celle qui a été trouvée, en égalant au quarré la Puiſſance $56xx+72x+25$, où nous avons trouvé $x \mathrel{)\!(} 19$: ſçavoir en ſuppoſant $x \mathrel{)\!(} z+19$, & alors on aura cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $56zz+2200z+21609$, pour le côté duquel prenant $147\ldots\frac{rz}{f}$, on trouvera $z \mathrel{)\!(} \frac{294rf+2200ff}{rr-56ff}$.

C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $r \mathrel{)\!(} 8$, & $f \mathrel{)\!(} 1$, on trouvera $z \mathrel{)\!(} 569$, & par conſéquent $x \mathrel{)\!(} 588$, $a \mathrel{)\!(} 589$, $b \mathrel{)\!(} 1177$, & $c \mathrel{)\!(} 1765$, comme auparavant.

Mais ſi l'on ſuppoſe $r \mathrel{)\!(} 15$, & $f \mathrel{)\!(} 2$, on trouvera $z \mathrel{)\!(} 17620$, & par conſéquent $x \mathrel{)\!(} 17639$, $a \mathrel{)\!(} 17640$, $b \mathrel{)\!(} 35279$, & $c \mathrel{)\!(} 52918$, & les nombres triangulaires qu'on cherche, ſeront

1400183821, 622321560, 155593620.

dont les côtez 52918, 35279, 17640, ſont en proportion arithmetique, & dont la ſomme 2178099001 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 66001.

La maniere la plus facile pour reſoudre cette Queſtion, eſt en mettant ces trois quantitez en proportion arithmetique, $1x$, $2x$, $3x$, pour les côtez des trois nombres triangulaires qu'on cherche, leſquels par conſéquent ſeront $\frac{xx+x}{2}$, $2xx+x$, $\frac{9xx+3x}{2}$, dont la ſomme eſt $7xx+3x$, qu'il faut égaler au triangle, ce qui eſt facile, parce que la ſomme 10 des unitez eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 4. Suppoſez donc $x \mathrel{)\!(} y+1$, & vous aurez cette autre ſomme à égaler au triangle $7yy+17y+10$. Pour cette fin il la faut multiplier par 8, & ajoûter 1 au produit, pour

avoir en ſa place cette Puiſſance à égaler au quarré, $56yy+136y+81$, pour le côté duquel prenant $9\ldots\frac{ay}{b}$, l'on trouvera $y\,\text{)}\,\frac{18ab+136bb}{aa-56bb}$, & par conſéquent $x\,\text{)}\,\frac{aa+18ab+80bb}{aa-56bb}$, &c.

Si l'on ſuppoſe $a\,\text{)}\,8$, & $b\,\text{)}\,1$, on trouvera $y\,\text{)}\,35$, & par conſéquent $x\,\text{)}\,36$, & les trois nombres triangulaires qu'on cherche, ſeront 666, 2628, 5886, dont les côtez 36, 72, 108, ſont en proportion arithmetique, & dont la ſomme 9180 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 135.

Mais ſi l'on ſuppoſe $a\,\text{)}\,15$, & $b\,\text{)}\,2$, l'on trouvera $y\,\text{)}\,1084$, & par conſéquent $x\,\text{)}\,1085$, & les trois nombres triangulaires qu'on cherche, ſeront

589155, 2355535, 5299140.

dont les côtez 1085, 2170, 3255, ſont en proportion arithmetique, & dont la ſomme 8243830 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 4060.

On peut égaler au triangle la ſomme précedente $7xx+3x$, ſans faire aucune ſuppoſition, ſçavoir en la multipliant par 8, & en ajoûtant 1 au produit, pour avoir en ſa place cette Puiſſance à égaler au quarré, $56xx+24x+1$, pour le côté duquel prenant $1\ldots\frac{cx}{d}$, l'on trouvera $x\,\text{)}\,\frac{2cd+24dd}{cc-56dd}$.

C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $c\,\text{)}\,8$, & $d\,\text{)}\,1$, l'on trouvera $x\,\text{)}\,5$, & les trois nombres triangulaires qu'on cherche, ſeront 15, 55, 120, dont les côtez 5, 10, 15, ſont en proportion arithmetique, & dont la ſomme 190 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 14.

Mais ſi l'on ſuppoſe $c\,\text{)}\,15$, & $d\,\text{)}\,2$, l'on trouvera $x\,\text{)}\,156$, & les trois nombres triangulaires qu'on cher-

cherche, ſeront 12246, 48828, 109746, dont les côtez 156, 312, 468, ſont en proportion arithmetique, & dont la ſomme 170820 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 584.

Que ſi l'on ſuppoſe d)0 60, & c)0 449, on trouvera x)0 140280, & les trois nombres triangulaires qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

9839309340, 39357097080, 88553363220.

dont les côtez 140280, 280560, 420840, ſont en proportion arithmetique, & dont la ſomme 137749769640 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 524880.

QUESTION XXXIV.

Trouver en nombres un triangle obliquangle, dont les trois côtez & l'aire ſoient exprimez par des nombres rationnels.

SI l'on met x, y, z, pour les côtez du triangle qu'on cherche, ſon aire ſera $\frac{1}{4}\sqrt{2xxyy+2xxzz+2yyzz-x^4-y^4-z^4}$. & l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $2xxyy+2xxzz+2yyzz-x^4-y^4-z^4$, laquelle a ces quatre nombres produiſans,

$$x+y+z.$$
$$x+y-z.$$
$$-x-y+z.$$
$$-x+y+z.$$

auſquels on donnera la proportion geometrique, en égalant le produit des deux extrêmes à celui des deux moyens, par cette Equation, $zz+2yz+yy-xx$)0 $xx-yy+2yz-zz$, dans laquelle on trouvera z)0 $\sqrt{xx-yy}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $xx-yy$, pour le côté duquel prenant $x \ldots \frac{ay}{b}$, l'on trouvera

en entiers $x \gtrless aa+bb$, & $y \gtrless 2ab$, & par conſéquent $z \gtrless aa...bb$. Ainſi l'on aura ce triangle $aa+bb$, $2ab$, $aa...bb$, qui ſe trouve rectangle: c'eſt pourquoi il faut autrement égaler au quarré la Puiſſance $2xxyy+2xxzz+2yyzz-x^4-y^4-z^4$, ſçavoir en égalant enſemble ſes quatre nombres produiſans: & comme cela eſt ici impoſſible, on multipliera le premier $x+y+z$ par le quarré indéterminé aa, le deuxiéme $x-y+z$ par le quarré indéterminé bb, le troiſiéme $x-y+z$ par le quarré indéterminé cc, & le dernier $-x+y+z$ par le quarré indéterminé dd, pour avoir en leur place ces autres quatre nombres produiſans,

$$aax+aay+aaz.$$
$$bbx+bby-bbz.$$
$$ccx-ccy+ccz.$$
$$-ddx+ddy+ddz.$$

qu'on égalera entre eux par ces trois Equations,

$$aax+aay+aaz \gtrless bbx+bby-bbz.$$
$$ccx-ccy+ccz \gtrless -ddx+ddy+ddz.$$
$$aax+aay+aaz \gtrless ccx-ccy+ccz.$$

Dans la premiere $aax+aay+aaz \gtrless bbx+bby-bbz$, l'on trouvera $x \gtrless \frac{bby-aay-aaz-bbz}{aa-bb}$, & dans la ſeconde $ccx-ccy+ccz \gtrless -ddx+ddy+ddz$, on trouvera le même $x \gtrless \frac{ccy+ddy-ccz+ddz}{cc+dd}$. Ainſi l'on aura cette quatriéme Equation, $\frac{bby-aay-aaz-bbz}{aa-bb} \gtrless \frac{ccy+ddy-ccz+ddz}{cc+dd}$ dans laquelle on trouvera en entiers $y \gtrless aadd+bbcc$, & $z \gtrless bbcc+bbdd-aacc-aadd$, & par conſéquent $x \gtrless aacc+bbdd$, & au lieu de la troiſiéme Equation, $aax+aay+aaz \gtrless ccx-ccy+ccz$, on aura celle-ci, $2aabbcc+2aabbdd \gtrless 2bbccdd-2aaccdd$, dans laquelle on trouvera $d \gtrless \frac{abc}{\sqrt{bbcc-aabb-aacc}}$. Il faut donc égaler au quarré cette Puiſſance

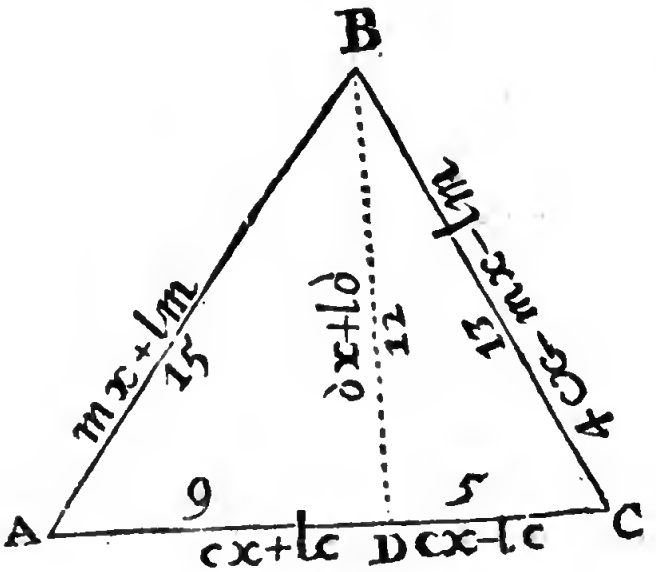
Puiſſance, $bbcc-aabb-aacc$, pour le côté duquel prenant $bc...am$, l'on trouvera $a \gtrless \frac{2bcm}{bb+cc+mm}$, &c.

Si l'on ſuppoſe $b \gtrless 3$, $c \gtrless 3$, & $m \gtrless 3$, l'on trouvera $a \gtrless 2$, & par conſéquent $d \gtrless 2$, $x \gtrless 72$, $y \gtrless 97$, & $z \gtrless 65$, & le triangle qu'on cherche, ſera 72, 97, 65, dont l'aire eſt 2340.

QUESTION XXXV.

Trouver en nombres le triangle ABC, dont les trois côtez AB, AC, BC, la perpendiculaire BD, & les ſegmens AD, CD, ſoient exprimez par des nombres rationnels: & de plus que la perpendiculaire BD, & les trois côtez BC, AC, AB, ſoient dans une continuelle proportion arithmetique.

AYant trouvé par *Queſt. I.* les deux nombres indéterminez $aa-bb$, $2ab$, dont les quarrez font



enſemble cet autre quarré $a^4+2aabb+b^4$, dont le côté eſt $aa+bb$, ſuppoſez, pour abreger le calcul, $aa-bb \gtrless c$, $2ab \gtrless d$,

$2ab \propto d$, $aa+bb \propto m$, & mettez $cx+lc$ pour le plus grand ſegment AD, $cx-lc$ pour le plus petit CD, $dx+ld$ pour la perpendiculaire BD, & $mx+lm$ pour le plus grand côté AB, qui eſt l'hypotenuſe du triangle ADB, lequel par ces poſitions deviendra rectangle : & alors la baſe AC vaudra $2cx$, & ſon double ſera $4cx$, duquel on ôtera le grand côté $AB \propto mx+lm$, & le reſte $4cx-mx-lm$ ſera pris pour le côté BC, afin que les trois côtez AB, AC, BC, ſoient en proportion arithmetique.

Pour faire que le triangle BDC ſoit rectangle, on égalera la ſomme des quarrez BD, CD, au ſeul quarré BC, par cette Equation, $ccxx-2lccx+llcc+ddxx+2lddx+lldd \propto 16ccxx-8cmxx+mmxx-8lcmx+2lmmx+llmm$, ou $mmxx-2lccx+2lddx+llmm \propto 16ccxx-8cmxx+mmxx-8lcmx+2lmmx+llmm$, à cauſe de $cc+dd \propto mm$: & l'on trouvera $x \propto \frac{2m-c}{+c-2m}$, ou $x \propto \frac{aa+3bb}{2aa-6bb}$. & les lignes du triangle ABC, ſeront en entiers & en moindres termes de cette grandeur,

$AD \propto 3aa-3bb$.	$BC \propto 9bb+aa$.
$CD \propto 9bb-aa$.	$AC \propto 2aa+6bb$.
$BD \propto 6ab$.	$AB \propto 3aa+3bb$.

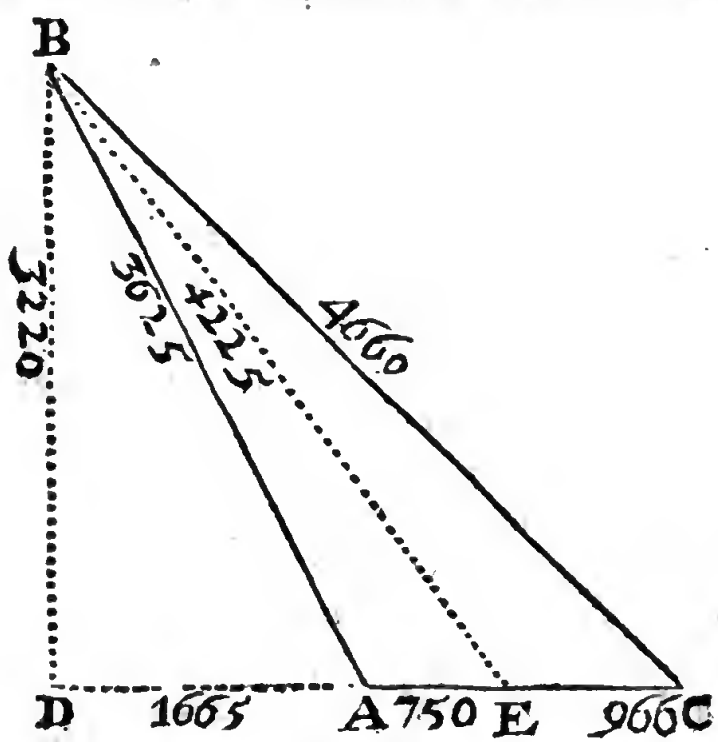
dont les trois AB, AC, BC, ſont en proportion arithmetique : & parce que l'on veut que les quatre AB, AC, BC, BD, ſoient dans une continuelle proportion arithmetique, il faut égaler la ſomme des deux extrêmes AB, BD, à celle des deux moyennes AC, BC, par cette Equation, $3aa+6ab+3bb \propto 15bb+3aa$, dans laquelle on trouvera en entiers $a \propto 2$, & $b \propto 1$, & les lignes du triangle qu'on cherche ſeront telles que vous les voyez marquées au dedans de la Figure.

QUESTION

QUESTION XXXVI.

Trouver en nombres un triangle ABC, dont les trois côtez AB, AC, BC, la perpendiculaire BD, la droite BE, qui divise l'angle ABC en deux également, & tous les segmens de la base AC, soient exprimez par des nombres rationnels.

CHoisissez en nombres un triangle rectangle quelconque, comme 3, 4, 5, que nous apellerons *a*, *b*, *c*,



pour le triangle rectangle BDE, en sorte qu'on ait DE ☍ *a*, BD ☍ *b*, & BE ☍ *c*, & si l'on met *x* pour EC, on aura CD ☍ $x+a$, & BC ☍ $\sqrt{xx+2ax+aa+bb}$. Ainsi l'on aura cette Puissance à égaler au quarré, $xx+2ax+aa+bb$, pour le côté duquel prenant $a+b \ldots x$, l'on trouvera x ☍ $\frac{ab}{2a+b}$, & par conséquent BC ☍ $\frac{2aa+2ab+bb}{2a+b}$

Mais

Mais comme les lignes BA, BC, EA, EC, ou AB, $\frac{2aa+2ab+bb}{2a+b}$, AE, $\frac{ab}{2a+b}$, doivent être proportionnelles, parce que l'on veut que la ligne BE diviſe l'angle ABC en deux également, ſi l'on ſuppoſe AB $\propto \frac{2aay+2aby+bby}{2a+b}$, l'on trouvera AE $\propto \frac{aby}{2a+b}$, & par conſéquent AD $\propto \frac{2laa+2lab-aby}{2a+b}$, & dans le triangle rectangle ADB, l'on trouvera cette Equation, $\frac{4lla^4+8lla^3b+4llaab-4la^3by-4llaaby+aabbyy+bb}{4aa+4ab+bb} \propto \frac{4lla^4+8lla^3b+8llaabb+4llab^3+llb^4}{4aa+4ab+bb}$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{4a^4+4a^3b+5aabb+4ab^3+b^4}{4a^4+8a^3b+7aabb+4ab^3+b^4}$, & les lignes du triangle qu'on cherche, ſeront en entiers de cette grandeur,

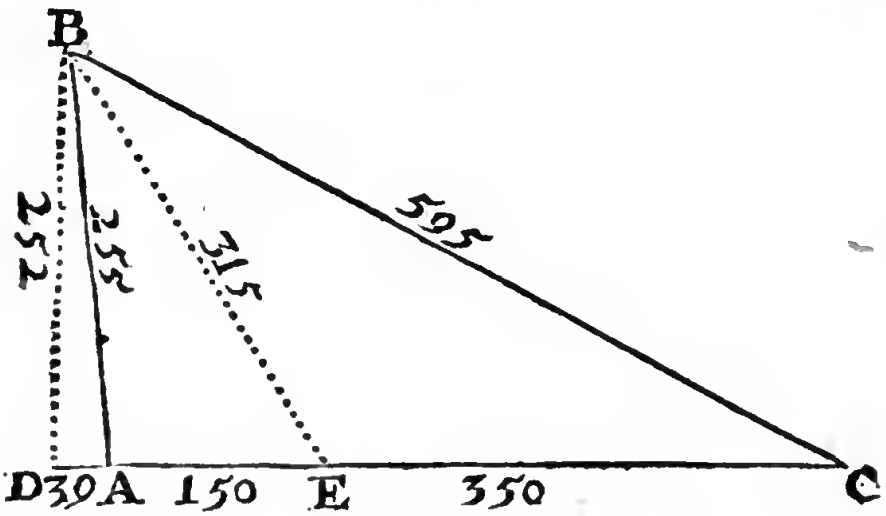
BD $\propto 8a^5b+20a^4bb+22a^3b^3+15aab^4+6ab^5+b^6$.
BE $\propto 8a^5c+20a^4bc+22a^3bbc+15aab^3c+6ab^4c+b^5c$.
AB $\propto 8a^6+16a^5b+22a^4bb+22a^3b^3+15aab^4+6ab^5+b^6$.
BC $\propto 8a^6+24a^5b+34a^4bb+30a^3b^3+17aab^4+6ab^5+b^6$.
AD $\propto 8a^6+18a^5b+18a^4bb+10a^3b^3+2aab^4$.
AE $\propto 4a^3b+4a^4bb+5a^3b^3+4aab^4+ab^5$.
AC $\propto 8a^5b+12a^4b^4+12a^3b^3+8aab^4+2ab^5$.
EC $\propto 4a^5b+8a^4bb+7a^3b^3+4aab^4+ab^5$.

Parce que nous avons ſuppoſé $a \propto 3$, $b \propto 4$, & $c \propto 5$, les lignes du triangle ABC ſeront en moindres termes de telle grandeur que vous les voyez marquées dans la Figure.

Pour avoir de plus petits nombres, mettez dx pour AC, & vous aurez AE $\propto dx-lx$, AD $\propto la-dx+lx$, CD $\propto x+a$, BC $\propto \sqrt{xx+2ax+aa+bb}$ ou BC $\propto \sqrt{xx+2ax+cc}$ à cauſe de $aa+bb \propto cc$, & AB $\propto \sqrt{ddxx-2ldxx+llxx-2ladx+2llax+llcc}$. Mais parce que les quatre lignes AE,

AE, AB, EC, BC, doivent être proportionnelles, leurs quarrez ſeront auſſi proportionnels, & l'on aura cette analogie, $ddxx-2ldxx+llxx$, $ddxx-2ldxx+llxx-2ladx+2llax+llcc::xx, xx+2ax+cc$, & en diviſant on aura celle-ci, $llcc+2llax-2ladx, ddxx-2ldxx+llxx::cc+2ax+xx, xx$, & diviſant les deux conſéquens par xx, on aura cette derniere analogie, $llcc+2llax-2ladx, dd-2ld+ll::cc+2ax+xx, 1$, de laquelle on tire cette Equation, $llcc+2llax-2ladx \propto ccdd-2lccd+llx+2adxx-4ladx+2llax$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{2lcc-ccd}{2ad-2la}$.

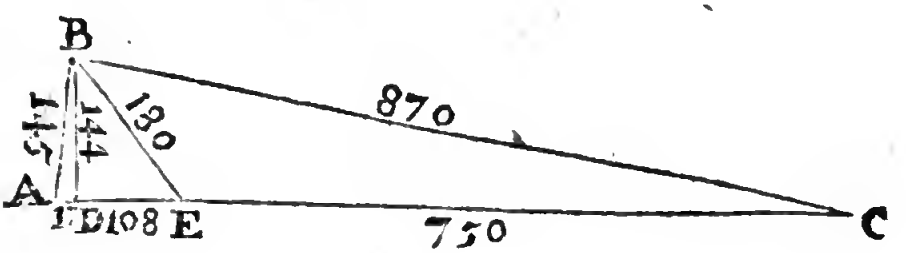
Il ne reſte plus qu'à rendre rationnelles les valeurs trouvées des lignes AB, BC, & ſi nous en faiſons une rationnelle, l'autre deviendra auſſi rationnelle, à cauſe



des quatre proportionnelles AB, AE, BC, EC. Pour rendre par exemple rationnelle la valeur de BC, qui eſt plus ſimple, l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $xx+2ax+cc$, & ſi à la place de x, on met ſa valeur trouvée $\frac{2lcc-ccd}{2ad-2la}$, l'on aura en entiers & en moindres termes cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $ccdd-4lbbd+4llbb$, pour le côté duquel prenant $cd...2lbm$, l'on

l'on trouvera $d \mathrel{\text{)o}} \frac{mm-llb}{cm-lb}$, & par conſéquent $x \mathrel{\text{)o}} \frac{2lc^3m-llbcc-bccmm}{2ab.m-2lacm}$, où l'on voit qu'afin que la quantité x ſoit affirmée, la quantité m doit être entre $\frac{lc}{b}$, & $\frac{lc}{b}-\sqrt{\frac{llcc}{bb}}-ll$, ou entre $\frac{lc}{b}$, & $\frac{lc}{b}+\sqrt{\frac{llcc}{bb}}-ll$, c'eſt-à-dire, entre $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{2}$, ou entre $\frac{1}{4}$ & 2, à cauſe de $a \mathrel{\text{)o}} 3$, de $b \mathrel{\text{)o}} 4$, & de $c \mathrel{\text{)o}} 5$. Si donc on ſuppoſe $m \mathrel{\text{)o}} \frac{1}{2}$, on trouvera $d \mathrel{\text{)o}} \frac{10}{7}$, & $x \mathrel{\text{)o}} \frac{10}{3}$, & les lignes du triangle qu'on cherche, ſeront telles que vous les voyez marquées dans la Figure.

Si vous voulez un triangle, où la perpendiculaire tombe en dedans, il faut ſuivre la premiere methode: mais pour égaler au quarré la Puiſſance $xx+2ax+cc$, au lieu de prendre $a+b \ldots x$, pour le côté de ce quarré, on doit ſelon le R. P. De Billy, prendra $x+\frac{2lc}{a}$, & alors on trouvera $x \mathrel{\text{)o}} \frac{aacc-4llcc}{4las c-2a^3}$, ou $x \mathrel{\text{)o}} \frac{135}{44}$, à cauſe de $a \mathrel{\text{)o}} 3$, de $b \mathrel{\text{)o}} 4$, & de $c \mathrel{\text{)o}} 5$, & les lignes du triangle qu'on cherche, ſeront telles que vous les voyez marquées dans la Figure.



La Queſtion qui manque ici ſur ce ſujet, ſe trouvera reſoluë dans le Traité des *Doubles Egalitez*.

QUESTION

QUESTION XXXVII.

Trouver en nombres un Quadrilatere dans un cercle, dont les quatre côtez & les deux diagonales ſoient exprimées par des nombres rationnels.

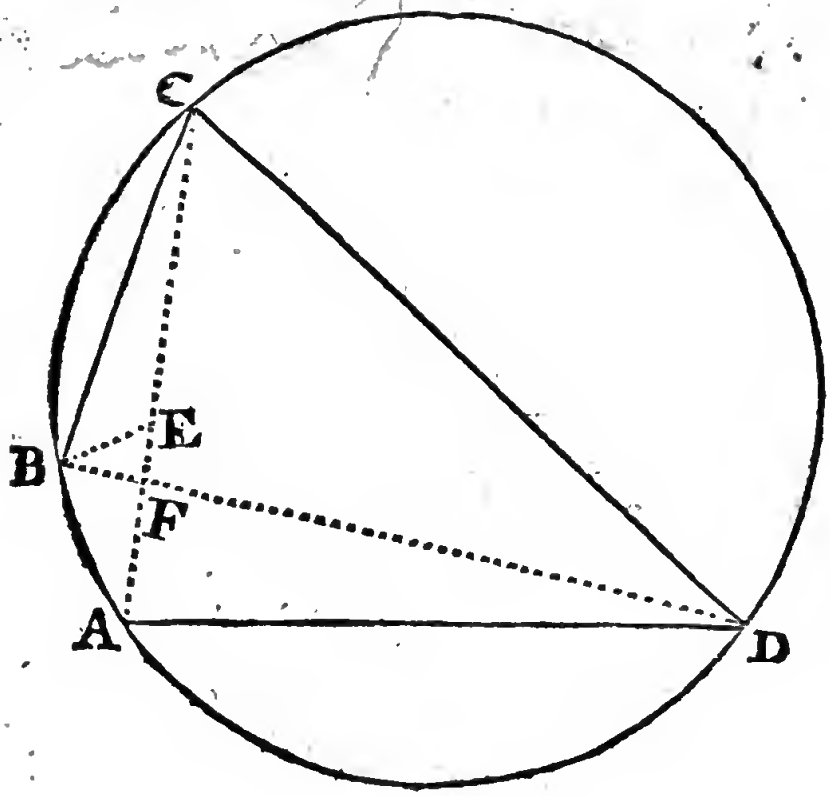
SUppoſons que dans un cercle on ait inſcrit le quadrilatere ABCD, dont les deux diagonales AC, BD, ſe coupent au point F, de la figure ſuivante, dans laquelle on voit aiſément que le triangle BFC eſt ſemblable au triangle AFD, & le triangle ABF au triangle CDF. C'eſt pourquoi l'on aura ces trois analogies,

BC, AD::CF, EF.
BF, AB::CF, CD.
BF, AF::CF, DF.

deſquelles on tire ſans peine ces deux autres,

BF, AF::BC, AD.
AF, DF::AB, CD.

Ayant donné le nom à chaque ligne par autant de lettres differentes, comme vous voyez à côté de la Figure, on diminuera le nombre de ces lettres en cette ſorte.



AB ☽ a.
BC ☽ b.
CD ☽ c.
AD ☽ d.
AC ☽ x.
BD ☽ y.
BF ☽ u.
CF ☽ ω.
DF ☽ f.

AE ☽ z ☽ $\frac{ac}{y}$ ☽ $\frac{acx}{ad+bc}$.

y ☽ $\frac{ac+bd}{x}$.

u ☽ $\frac{a\omega}{c}$ ☽ $\frac{abx}{ad+bc}$.

ω ☽

$$\omega \text{) } \frac{bcx}{ad+bc}.$$

$$f \text{) } \frac{d\omega}{b} \text{) } \frac{cdx}{ad+bc}.$$

Dans la premiere analogie, BC, AD :: CF, DF, ou b, d :: ω, f, on trouvera f, ou DF) $\frac{d\omega}{b}$, & dans la seconde BF, AB :: CF, CD, ou u, a :: ω, c, on trouvera u, ou BF) $\frac{a\omega}{c}$, & au lieu de la troisiéme BF, AF :: CF, DF, ou u, $x-\omega$ :: ω, f, on aura celle-ci, $\frac{a\omega}{c}$, $x-\omega$ :: ω, $\frac{d\omega}{b}$, dans laquelle on trouvera ω, ou CF) $\frac{bcx}{ad+bc}$, & au lieu de u, ou BF) $\frac{a\omega}{c}$, on aura BF) $\frac{abx}{ad+bc}$, & au lieu de f, ou DF) $\frac{d\omega}{b}$, on aura DF) $\frac{cdx}{ad+bc}$, & enfin au lieu de AF) $x-\omega$, on aura AF) $\frac{adx}{ad+bc}$.

Comme les deux dernieres analogies qui restent ne produisent rien, parce qu'elles dépendent des trois précédentes, il en faut chercher deux autres par quelque construction particuliere, pour faire évanouïr les trois lettres d, x, y. Cette construction se fera ici très-commodément en faisant au point B, l'angle ABE égal à l'angle CBD, & en supposant AE) z, & alors on connoîtra aisément que le triangle ABE est semblable au triangle BCD, & le triangle EBC au triangle ABC. C'est pourquoi l'on aura ces deux analogies,

AB, AE :: BD, CD.
AD, BD :: EC, BC.

Dans la premiere AB, AE :: BD, CD, ou a, z :: y, c, l'on trouvera z, ou AE) $\frac{ac}{y}$, & par conséquent EC,

ou

ou $x-z \propto \frac{xy-ac}{y}$, & au lieu de la ſeconde analogie, AD, BD :: EC, BC, ou $d, y :: x-z, b$, on aura celle-ci, $d, y :: \frac{xy-ac}{y}, b$, dans laquelle on trouvera y, ou BD $\propto \frac{ac+bd}{x}$, & au lieu de z, ou AE $\propto \frac{ac}{y}$, on aura AE $\propto \frac{acx}{ac+bd}$.

On tire de la valeur de ces lignes le premier Theorême que nous avons démontré dans nôtre *Traité de la conſtruction de la Table des Sinus*, ſçavoir que *le Rectangle ſous les diagonales AC, BD, eſt égal aux deux Rectangles ſous les côtez oppoſez, ſçavoir au Rectangle ſous les deux côtez oppoſez AD, BC, & au Rectangle ſous les deux autres côtez oppoſez AB, CD.* Car en multipliant la diagonale AC $\propto x$, par l'autre diagonale BD $\propto \frac{ac+bd}{x}$, on a le Rectangle $ac+bd$, qui eſt bien égal à la ſomme des deux précedens.

Pour faire évanouïr la lettre x, il faut trouver en une autre façon une des lignes déja trouvées, car en comparant enſemble ces deux valeurs, on y trouvera une valeur pour la quantité x.

Si de la ligne BD $\propto \frac{ac+bd}{x}$, on ôte BF $\propto u$, on aura DF $\propto \frac{ac+bd-xu}{x}$, & au lieu de la premiere analogie BC, AD :: CF, DF, on aura celle-ci, $b, d :: \omega, \frac{ac+bd-xu}{x}$, dans laquelle on trouvera ω, ou GF $\propto \frac{abc+bbd-bux}{x}$, & au lieu de la ſeconde analogie, BF, AB :: CF, CD, on aura celle-ci, $u, a :: \frac{abc+bbd-bux}{dx}, c$, dans

dans laquelle on trouvera u, ou BF $\mathrel{\text{Ø}} \frac{aabc+abbd}{abx+cdx}$, & comme nous avons déja trouvé auparavant u, ou BF $\mathrel{\text{Ø}} \frac{abx}{ad+bc}$, nous aurons cette Equation, $\frac{aabc+abbd}{abx+cdx} \mathrel{\text{Ø}} \frac{abx}{ad+bc}$ dans laquelle on trouvera x, ou AC $\mathrel{\text{Ø}} \sqrt{\frac{aacd+abdd+abcc+bbcd}{ab+cd}}$.

Ainſi vous voyez que *ſi les quatre côtez* a, b, c, d, *ſont donnez, les diagonales ſont auſſi données*, & que *le quarré de la diagonale AC eſt égal à la ſomme de deux Plans, dont l'un eſt quatriéme proportionnel aux trois Plans* $ab+cd$, cd, $aa+bb$, *& l'autre eſt quatriéme proportionnel aux trois Plans* $ab+cd$, ab, $cc+dd$. Mais on peut dire plus brievement, que *le quarré de la diagonale AC eſt quatriéme proportionnel aux trois Plans* $ab+cd$, $ac+bd$, $ad+bc$; & que par conſéquent *le quarré de l'autre diagonale BD eſt quatriéme proportionnel aux trois Plans* $ad+bc$, $ab+cd$, $ac+bd$. Car puiſque l'on a cette analogie, $ab+cd$, $ac+bd$:: $ad+bc$, xx, on aura celle-ci, $ab+cd$, xy:: $ad+bc$, xx, ou $ab+cd$, $ad+bc$:: xy, xx, ou $ab+cd$, $ad+bc$:: y, x, ou $ab+cd$, $ad+bc$:: yy, xy, ou $ab+cd$, $ad+bc$:: yy, $ac+bd$, ou $ad+bc$, $ab+cd$:: $ac+bd$, yy.

C'eſt pourquoi ſi l'une de ces deux diagonales eſt rationnelle, l'autre le ſera auſſi. Ainſi nous aurons ſeulement cette Puiſſance à égaler au quarré, $\frac{aacd+abdd+abcc+bbcd}{ab+cd}$. Multipliez le Numerateur par le Dénominateur, & vous aurez en entiers cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $aabbcc+aabbdd+4accdd+bbccdd+a^3bcd+ab^3cd+abcd^3+abc^3d$, pour le côté duquel prenant $abc+\frac{bbd+ccd+aad}{2}$, on trouvera

$d \gtrless \frac{a^4+b^4+c^4-2aabb-2aacc-2bbcc}{4abc}$, & au lieu de $x \gtrless$

$\frac{\sqrt{aacd+abda+abcc+bbcd}}{ab+cd}$, l'on aura $x \gtrless \frac{a^4-2aabb+b^4-c^4}{2aac+2bbc-2c3}$,

& les lignes du Quadrilatere qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

AB $\gtrless a$.

BC $\gtrless b$.

CD $\gtrless c$.

AD $\gtrless \frac{a^4+b^4+c^4-2aabb-2aacc-2bbcc}{4abc}$.

AC $\gtrless \frac{a^4-2aabb+b^4-c^4}{2aac+2bbc-2c3}$.

BD $\gtrless \frac{a^4+2bbcc-b^4-c^4}{2a3-2abb-2acc}$.

ſi l'on ſuppoſe $a \gtrless 1$, $b \gtrless 2$, & $c \gtrless 4$, on trouvera $d \gtrless \frac{105}{32}$, & $x \gtrless \frac{247}{88}$, & les lignes du Quadrilatere ABCD, ſeront en entiers de cette grandeur,

AB $\gtrless$ 6688.	AD $\gtrless$ 21945.
BC $\gtrless$ 13376.	AC $\gtrless$ 18772.
CD $\gtrless$ 26752.	BD $\gtrless$ 25168.

Pour faire que la valeur de ces lignes ſoit affirmée, il ſuffit que la valeur trouvée de AD, ou ſeulement ſon Numerateur $a^4+b^4+c^4-2aabb-2aacc-2bbcc$, ſoit affirmé, ou plus grand que 0. Ainſi nous aurons cette inégalité, $a^4+b^4+c^4-2aabb-2aacc-2bbcc \oplus 0$, ou $c^4-2aacc-2bbcc \oplus 2aabb-a^4-b^4$, à laquelle ajoûtant de chaque côté le quarré $a^4+2aabb+b^4$ de la moitié du coëfficient, on aura cette autre inégalité, $c^4-2aacc-2bbcc+a^4+2aabb+b^4 \oplus 4aabb$, où prenant la Racine quarrée de chaque membre, on aura celle-ci, $cc-aa-bb \oplus 2ab$, & par conſéquent $cc \oplus aa+2ab+bb$, & par la Racine quarrée l'on aura $c \oplus a+b$, ce qui fait voir que la quantité c doit être plus grande que la ſomme des deux a, b.

QUES-

QUESTION XXXVIII.

Trouver en nombres un Quadrilatere dans un cercle, dont l'aire & les quatre côtez ſoient exprimez par des nombres rationnels.

SI l'on met x, y, z, ω, pour les quatre côtez du *Quadrilatere qu'on cherche*, *ſon aire ſera* $\sqrt{2xxyy+2xxzz+2xx\omega\omega+2yyzz+2yy\omega\omega+8xyz\omega-x^4-y^4-z^4-\omega^4}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $2xxyy+2xxzz+2xx\omega\omega+2yyzz+2yy\omega\omega+8xyz\omega-x^4-y^4-z^4-\omega^4$, laquelle a ces deux nombres produiſans,

$$xx+2xy+yy-zz+2z\omega-\omega\omega.$$
$$zz+2z\omega+\omega\omega-xx+2xy-yy.$$

que vous égalerez enſemble par cette Equation, $xx+2xy+yy-zz+2z\omega-\omega\omega \propto zz+2z\omega+\omega\omega-xx+2xy-yy$, laquelle étant reduite donnera celle-ci, $xx+yy \propto zz+\omega\omega$: qui fait connoître que les quarrez des quatre côtez du Quadrilatére qu'on cherche, ſont en proportion arithmetique, qui ne peut pas neanmoins être continuë, parce qu'il eſt impoſſible de trouver quatre nombres quarrez dans une continuelle proportion arithmetique.

Pour reſoudre cette derniere Equation, $xx+yy \propto zz+\omega\omega$, ſuppoſez $z \propto a-x$, & $\omega \propto b-y$, pour avoir cette autre Equation, $xx+yy \propto aa-2ax+xx+bb-2by+yy$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{aa+bb-2ax}{2b}$, & les côtez du Quadrilatere qu'on cherche, ſeront en entiers de cette grandeur,

$$2bx.$$
$$aa+bb-2ax.$$
$$2ab-2bx.$$
$$bb-aa+2ax.$$

où l'on voit qu'afin que châcun de ces côtez ſoit exprimé

primé par un nombre affirmé, la quantité x étant moindre que a, doit auſſi être moindre que $\frac{aa-bb}{2a}$, & plus grande que $-\frac{aa-bb}{2a}$.

C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $a \gg 3$, $b \gg 4$, & $x \gg 1$, les quatre côtez du Quadrilatére ſeront 6, 17, 18, 1, & ſon aire ſera 60.

Ou bien multipliez le premier nombre produiſant $xx+2xy+yy-zz+2z\omega-\omega\omega$ par le quarré indéterminé aa, & le deuxiéme $zz+2z\omega+\omega\omega-xx+2xy-yy$, par le quarré indéterminé bb, & égalez enſemble les deux produits par cette Equation, $aaxx+2aaxy+aayy-aazz+2aaz\omega-aa\omega\omega \gg bbzz+2bbz\omega+bb\omega\omega-bbxx+2bbxy-bbyy$, dans laquelle on trouvera $\omega \gg \frac{aaz-bbz}{aa+bb} + \sqrt{xx+\frac{2aaxy-2bbxy}{aa+bb}+yy\frac{4aabbzz}{a^4+2aabb+b^4}}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $xx+\frac{2aaxy-2bbxy}{aa+bb}+yy-\frac{4aabbzz}{a^4+2aabb+b^4}$, pour le côté duquel prenant $x...y$, on trouvera $y \gg \frac{bbzz}{aax+bbx}$, & par conſéquent $\omega \gg \frac{aaxx+bbxx-bbzz}{aax+bbx}+\frac{aaz-bbz}{aa+bb}$, & les côtez du Quadrilatere qu'on cherche, ſeront en entiers de cette grandeur.

$$aaxx+bbxx.$$
$$bbzz.$$
$$aaxz+bbxz.$$
$$aaxx+bbxx+aaxz-bbxz-bbzz.$$

Si l'on ſuppoſe $a \gg 4$, $b \gg 3$, $x \gg 4$, & $z \gg 5$, les côtez du Quadrilatére ſeront en moindres termes, 80, 45, 100, 63, & ſon aire ſera 4752.

Au lieu de deux nombres produiſans, on en peut avoir quatre, ſçavoir

$x+y$

$x+y+z-\omega.$
$x+y-z+\omega.$
$x-y+z+\omega.$
$-x+y+z+\omega.$

que l'on rendra quarrez en les égalant chacun à un quarré indéterminé, comme le premier au quarré aa, le ſecond au quarre bb, le troiſiéme au quarré cc, & le quatriéme au quarré dd, de ſorte qu'on aura ces quatre Equations

$lx+ly+lz-l\omega \propto aa.$
$lx+ly-lz+l\omega \propto bb.$
$lx-ly+lz+l\omega \propto cc.$
$-lx+ly+lz+l\omega \propto dd.$

Dans la premiere $lx+ly+lz-l\omega \propto aa$, on trouvera $lx \propto aa-ly-lz+l\omega$, & dans la ſeconde $lx+ly-lz+l\omega \propto bb$, on trouvera le même $lx \propto bb-ly+lz-l\omega$. C'eſt pourquoi on aura cette cinquiéme Equation, $aa-ly-lz+l\omega \propto bb-ly+lz-l\omega$, dans laquelle on trouvera $lz \propto \frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}bb+l\omega$, & par conſéquent $lx \propto \frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}bb-ly$, & les deux dernieres Equations ſe changeront en ces deux autres,

$aa+2l\omega-2ly \propto cc.$
$-bb+2l\omega+2ly \propto dd.$

Dans la premiere $aa+2l\omega-2ly \propto cc$, on trouvera $l\omega \propto \frac{1}{2}cc-\frac{1}{2}aa+ly$, & dans la ſeconde $-bb+2l\omega+2ly \propto dd$, on trouvera le même $l\omega \propto \frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}dd-ly$. C'eſt pourquoi l'on aura cette troiſiéme Equation, $\frac{1}{2}cc-\frac{1}{2}aa+ly \propto \frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}dd-ly$, dans laquelle on trouvera $ly \propto \frac{aa+bb-cc+dd}{4}$, & au lieu de $l\omega \propto \frac{1}{2}cc-\frac{1}{2}aa+ly$, ou de $l\omega \propto \frac{1}{2}bb+\frac{1}{2}dd-ly$, on aura $l\omega \propto \frac{-aa+bb+cc+dd}{4}$, & au lieu de $lz \propto \frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}bb+l\omega$, on aura $lz \propto \frac{aa-bb+cc+dd}{4}$, & enfin au lieu de $lx \propto \frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}bb-ly$, on aura $lx \propto \frac{aa+bb}{}$

$\frac{aa+bb+cc+dd}{4}$, & les côtez du Quadrilatere qu'on cherche, ſeront en entiers de cette grandeur,

$$aa+bb+cc-dd.$$
$$aa+bb-cc+dd.$$
$$aa-bb+cc+dd.$$
$$-aa+bb+cc+dd.$$

où l'on voit que des quatre quarrez indéterminez aa, bb, cc, dd, chacun doit être moindre que la ſomme des trois autres.

Si donc on ſuppoſe $a \propto 2$, $b \propto 3$, $c \propto 4$, & $d \propto 5$, les quatre côtez du Quadrilatére ſeront en moindres termes, 2, 11, 18, 23, & ſon aire ſera 120, qui ſe rencontre un nombre triangulaire, & auſſi égale à l'aire de ce triangle rectangle 10, 24, 26, dont les nombres generateurs ſont 1, 5.

QUESTION XXXIX.

Trouver deux nombres quarrez, dont la difference ſoit égale à un nombre donné.

II. 2. Dioph.

SI l'on met xx, yy, pour les deux nombres quarrez qu'on cherche, & ab pour le nombre donné, on aura ſelon la condition de la Queſtion cette Equation, $xx-yy \propto ab$, dans laquelle on trouvera $x \propto \sqrt{yy+ab}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $yy+ab$, pour le côté duquel prenant $y+c$, on trouvera $y \propto \frac{ab \ldots cc}{2c}$, & par conſéquent $x \propto \frac{ab+cc}{2c}$. Ainſi les côtez des deux quarrez qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

$$\frac{ab+cc,\ ab \ldots cc}{2c}.$$

Si

Si $ab \propto 60$, & que l'on ſuppoſe $c \propto 3$, ou $c \propto 20$, les deux quarrez qu'on cherche, ſeront tels, $\frac{529.289}{4}$, dont les côtez ſont $\frac{23.17.}{2}$.

Mais ſi l'on ſuppoſe $c \propto 2$, ou $c \propto 30$, les deux quarrez qu'on cherche, ſeront 256, 196, dont les côtez ſont 16, 14.

Que ſi l'on ſuppoſe $c \propto 6$, ou $c \propto 40$, les deux quarrez qu'on cherche, ſeront 64, 4, dont les côtez ſont 8, 2.

Remarque.

Cette Queſtion ſe peut reſoudre ſans qu'il ſoit beſoin d'égaler au quarré aucune Puiſſance, par une methode qui vous fera voir l'origine & la demonſtration du Canon de Diophante, & de ſa maniere particuliere pour reſoudre les *Doubles Egalitez.*

Parce que dans l'Equation conſtitutive $xx-yy \propto ab$, le premier membre $xx-yy$, a ces deux nombres produiſans $x+y$, $x-y$, & que les deux nombres produiſans du ſecond membre ab, ſont a & b, on égalera le premier nombre produiſant d'un membre au premier de l'autre membre, & le ſecond au ſecond, par ces deux Equations,

$$x+y \propto a.$$
$$x-y \propto b.$$

Dans la premiere $x+y \propto a$, on trouvera $x \propto a-y$. & la deuxiéme $x-y \propto b$, ſe changera en celle-ci, $a-2y \propto b$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{a-b}{2}$, & par conſéquent $x \propto \frac{a+b}{2}$. Ainſi les côtez des deux quarrez qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{a+b,\ a-b}{2}.$$

Si $a \gg 15$, & $b \gg 4$, les deux quarrez qu'on cherche, ſeront $\frac{361, 121}{4}$, dont les côtez ſont $\frac{19, 11}{2}$: & ſi $a \gg 12$, & $b \gg 5$, les deux quarrez qu'on cherche, ſeront $\frac{289, 49}{4}$, dont les côtez ſont $\frac{17, 7}{2}$.

On tire de cette ſeconde ſolution, le Canon ſuivant, qui eſt de Diophante; *Les moitiez de la ſomme & de la difference des deux nombres produiſans de la difference donnée, ſont les deux nombres qu'on cherche.*

Des Doubles Egalitez.

NOus reſoudrons ici les Doubles Egalitez en deux manieres: premierement par les préceptes du Traité précedent, où vous en avez déja vû la pratique dans quelques Queſtions: ſecondement par la methode de Diophante, dont vous avez auſſi vû quelques exemples dans le Traité précedent, & dont vous avez auſſi vû le fondement & l'origine dans la derniere des Queſtions précedentes. Il eſt très-utile de les bien entendre toutes deux, parce qu'il arrive bien ſouvent que quand l'une ne peut pas ſervir commodément pour la ſolution d'un Problême numerique, l'autre le peut très-commodément, comme vous verrez dans les Queſtions que nous ajoûterons à la fin de ce Traité pour vous faire voir l'application des regles que nous allons expliquer le plus clairement qu'il nous ſera poſſible dans les Problêmes ſuivans.

PROBLEME I.

Reſoudre une Double Egalité, où la lettre inconnuë a une dimenſion.

POur reſoudre une Double Egalité, où la lettre inconnuë n'a qu'une dimenſion, par la methode des

des ſimples Egalitez, ou par celle de Diophante, il faut que les quantitez connuës qui multiplient l'inconnuë dans chaque Puiſſance, ſoient dans la raiſon de deux quarrez, & alors on la pourra reſoudre prémierement par la methode des ſimples Egalitez, en cette ſorte.

Propoſons cette Double Egalité,

$$2ax+ab.$$
$$8ax+3ab.$$

où les premiers termes $2ax$, $8ax$, ou les quantitez connuës $2a$, $8a$, qui multiplient l'inconnuë dans chaque Puiſſance, ſont dans la raiſon des deux quarrez 1, 4. Egalez la premiere Puiſſance $2ax+ab$ au quarré cc, pour avoir $x \propto \frac{cc-ab}{2a}$. Egalez auſſi la ſeconde Puiſſance $8ax+3ab$, au quarré dd, pour avoir le même $x \propto \frac{dd-3ab}{8a}$: c'eſt pourquoi l'on aura cette Equation, $\frac{cc-ab}{2a} \propto \frac{dd-3ab}{8a}$, dans laquelle on trouvera $d \propto \sqrt{4cc-ab}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $4cc-ab$, pour le côté duquel prenant $2c...m$, on trouvera $c \propto \frac{ab+mm}{4m}$, & par conſéquent $d \propto \frac{mm...ab}{2m}$, & $x \propto \frac{m^4-14abmm+aabb}{32amm}$, & les deux Puiſſances propoſées ſe changeront en ces deux quarrez,

$$\frac{aabb+2abmm+m^4}{16mm}, \quad \frac{aabb-2abmm+m^4}{4mm}.$$

dont les côtez ſont $\frac{ab+mm}{4m}$, $\frac{ab...mm}{2m}$.

Détermination.

Pour faire que la quantité inconnuë x, ou ſa valeur

leur trouvée $\frac{aabb-14abmm+m^4}{32amm}$ ſoit affirmée, ou plus grande que 0, l'on aura cette inégalité, $aabb-14abmm+m^4 \oplus 0$, ou $m^4-14abmm \oplus -aabb$, à laquelle ſi on ajoûte de chaque côté le quarré $49aabb$ de la moitié $7ab$ du coëfficient $14ab$, l'on aura cette autre inégalité, $m^4-14abmm+49aabb \oplus 48aabb$, dont la Racine quarrée donne celle-ci, $mm-7ab \oplus \surd 48aabb$, ou $7ab-mm \oplus \surd 48aabb$, dans laquelle on trouvera $m \oplus \surd 4ab+\surd 3ab$, ou bien $m \ominus \surd 4ab-\surd 3ab$.

C'eſt pourquoi ſi $a \gg 2$, & $b \gg 6$, & que l'on ſuppoſe $m \gg 13$, l'on trouvera $c \gg \frac{181}{32}$, $d \gg \frac{157}{16}$, & $x \gg \frac{313}{1216}$, & la Double Egalité propoſée $2ax+ab$, $8ax+3ab$, ou $4x+12$, $16x+36$, ſe changera en ces deux quarrez, $\frac{32761}{37024}$, $\frac{14649}{2312}$, dont les côtez ſont $\frac{181}{32}$, $\frac{157}{152}$.

Mais ſi l'on ſuppoſe $m \gg \frac{1}{2}$, l'on trouvera $c \gg \frac{49}{8}$, $d \gg \frac{47}{4}$, & $x \gg \frac{1613}{376}$, & la Double Egalité propoſée $2ax+ab$, $8ax+3ab$, ou $4x+12$, $16x+36$, ſe changera en ces deux quarrez $\frac{2401}{64}$, $\frac{2109}{72}$, dont les côtez ſont $\frac{49}{8}$, $\frac{47}{4}$.

Double Egalité de Bachet, 45. 4.

C'eſt de la même façon que l'on reſoudra cette autre Double Egalité,

$$\begin{array}{l} ax+bc. \\ dx+pp-\frac{ppd+bcd}{a}. \end{array}$$

qui eſt de la qualité de celle-ci,

$$\begin{array}{l} 3N+13. \\ 1N+7. \end{array}$$

que Bachet propoſe dans le premier cas au commentaire ſur 45. 4. *Dioph.* Car ſi on multiplie la difference $ax-dx+bc-pp+\frac{ppd-bcd}{a}$, par le nombre $\frac{d}{a-d}$, ou qu'on la diviſe par le nombre $\frac{a-d}{d}$, & qu'on ôte

le

le produit ou le quotient $dx+\frac{abcd-adpp+ddpp-bcdd}{aa-ad}$ de la plus petite Puiſſance $dx+pp-\frac{ppd+bcd}{a}$, il reſte le quarré pp, qui nous ſervira pour reſoudre cette Double Egalité en cette ſorte.

Egalez la premiere Puiſſance $ax+bc$, au quarré mm, pour avoir $x \mathrel{)\!(} \frac{mm-bc}{a}$, & la deuxiéme $dx+pp-\frac{ppd+bcd}{a}$, au quarré nn, pour avoir le même $x \mathrel{)\!(} \frac{ann-app+dpp-bcd}{ad}$, & par conſéquent cette Equation, $\frac{mm-bc}{a} \mathrel{)\!(} \frac{ann-app+dpp-bcd}{ad}$, dans laquelle on trouvera $n \mathrel{)\!(} \sqrt{\frac{dmm-app-dpp}{a}}$. Ainſi on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $\frac{dmm-app-dpp}{a}$. Pour cette fin ſuppoſez $m \mathrel{)\!(} y+p$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $pp+\frac{2dpy+dyy}{a}$, pour le côté duquel prenant $p...y$, on trouvera $y \mathrel{)\!(} \frac{2ap+2dp}{a-d}$, & par conſéquent $m \mathrel{)\!(} \frac{3ap+dp}{a-d}$, $n \mathrel{)\!(} \frac{ap+3dp}{a-d}$, & $x \mathrel{)\!(} -\frac{bc}{a}+\frac{9aapp+6adpp+ddpp}{a^3-2aad+add}$.

Si $a \mathrel{)\!(} 3$, $b \mathrel{)\!(} 1$, $c \mathrel{)\!(} 13$, $d \mathrel{)\!(} 1$, & $p \mathrel{)\!(} 2$, on trouvera $y \mathrel{)\!(} 8$, $m \mathrel{)\!(} 10$, $n \mathrel{)\!(} 6$, & $x \mathrel{)\!(} 29 \mathrel{)\!(} 1N$, comme Bachet, & la Double Egalité propoſée ſe changera en ces deux quarrez 100, 36, dont les côtez ſont 10, 3.

Solution plus générale.

Pour avoir une ſolution plus générale, multipliez la Puiſſance $pp+\frac{2dpy-dpp}{a}$ par le quarré aa, pour avoir en entiers cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $aapp+2adpy-adpp$, pour le côté duquel prenant

$ap...qy$

$ap \ldots qy$, en ſorte qu'on ait $n \propto p \ldots \frac{qy}{a}$, l'on trouvera $y \propto \frac{2aap+2apq}{qq-ad}$, & par conſéquent $m \propto \frac{adp+2apq+pqq}{qq-ad}$, $n \propto \frac{adp+2dpq+pqq}{qq-ad}$, & $x \propto \frac{aaddpp+4aadppq+4aappqq+}{q^4-2adqq}$ $\frac{2adppqq+4appq^3+ppq^4}{+aadd} - \frac{bc}{a}$.

Parce que nous avons ſuppoſé $a \propto 3$, $b \propto 1$, $c \propto 13$, $d \propto 1$, & $p \propto 2$, ſi l'on ſuppoſe $q \propto 3$, l'on trouvera $y \propto 8$, $m \propto 10$, $n \propto 6$, & $x \propto 29$, comme auparavant; mais ſi l'on ſuppoſe $q \propto 2$, l'on trouvera $y \propto 36$, $m \propto 38$, $n \propto 22$, & $xx \propto 477$, & la Double Egalité propoſée ſe changera en ces deux quarrez, 1444, 484, dont les côtez ſont 38, 22.

Ce qui rend cette ſolution plus générale que la premiere, eſt la quantité indéterminée q; mais on peut avoir deux quantitez indéterminées, ce qui rendra la ſolution encore plus générale, ſi pour égaler au quarré la Puiſſance précedente $pp+\frac{2dpy+dyy}{a}$, on prend $p \ldots \frac{qy}{r}$, pour le côté de ce quarré, en ſorte qu'on ait $n \propto p \ldots \frac{qy}{r}$, car on trouvera $y \propto \frac{2dprr+2apqr}{aqq-drr}$, & par conſéquent $m \propto \frac{2apqr+apqq+dprr}{aqq-drr}$, $n \propto \frac{2dpqr+apqq+dprr}{aqq-drr}$, & $x \propto \frac{4aap^2qqrr+4apq^3r+aappq^4+4adppqr^3+2ddppqqrr+ddp^2r^4}{a^3q^4-2aadqqrr+addr^4}$.

Parce que nous avons ſuppoſé $a \propto 3$, $b \propto 1$, $c \propto 13$, $d \propto 1$, & $p \propto 2$, ſi l'on ſuppoſe $q \propto 1$, & $r \propto 1$, l'on trouvera $y \propto 8$, $m \propto 10$, $n \propto 6$, & $x \propto 29$, comme Bachet: mais ſi l'on ſuppoſe $q \propto 2$, & $r \propto 3$, l'on trouvera $y \propto 36$, $m \propto 38$, $n \propto 22$, & $x \propto 477$, comme auparavant.

Autre

Autre Double Egalité de Bachet 45. 4.

C'eſt auſſi de la même façon que l'on reſoudra cette autre Double Egalité,

$$\frac{ax+bc.}{dx-\frac{ppd+bcd}{a}}$$

qui eſt de la qualité de celle-ci,

$$\frac{6N+25.}{2N+3.}$$

que Bachet propoſe au même endroit dans ſon ſecond cas: car ſi on multiplie la difference $ax-dx+bc+\frac{ppd-bcd}{a}$, par le nombre $\frac{d}{a}$, ou qu'on la diviſe par le nombre $\frac{a-d}{d}$, & qu'on ôte le produit ou le quotient $bx+\frac{bcd}{a-d}+\frac{ppdd-bcdd}{aa-ad}$ de la plus petite Puiſſance $dx-\frac{ppd+bcd}{a}$, il reſte ce nombre nié, $\frac{-dpp}{a-d}$, qui eſt bien au Multiplicateur $\frac{d}{a-d}$, ou au Diviſeur $\frac{a-d}{d}$, comme quarré à quarré. C'eſt pourquoi on reſoudra cette Double Egalité en cette ſorte.

Egalez la premiere Puiſſance $ax+bc$ au quarré mm, pour avoir $x \mathrel{)\!(} \frac{mm-bc}{a}$, & la deuxiéme $dx-\frac{ppd+bca}{a}$ au quarré nn, pour avoir le même $x \mathrel{)\!(} \frac{an+ppd-bcd}{ad}$, & par conſéquent cette Equation, $\frac{mm-bc}{a} \mathrel{)\!(} \frac{ann+ppd-bcd}{ad}$; dans laquelle on trouvera $m \mathrel{)\!(} \sqrt{pp+\frac{ann}{d}}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $pp+\frac{ann}{d}$, pour le

le côté duquel prenant $p \ldots \frac{qn}{r}$, on trouvera $n \gtrless \frac{2dpqr}{dqq-arr}$, & par conſéquent $m \gtrless \frac{dpqq+aprr}{dqq-arr}$, & $x \gtrless \frac{ddppq^4+2aadppqqrr+aappr^4}{addq^4-2aadqqrr+a^3r^4}$

Si $a \gtrless 6$, $b \gtrless 5$, $c \gtrless 5$, $d \gtrless 2$, & $p \gtrless 4$, & qu'on ſuppoſe $q \gtrless 3$, & $r \gtrless 1$, on trouvera $m \gtrless 8$, $n \gtrless 4$, & $x \gtrless \frac{13}{2}$, & la Double Egalité propoſée ſe changera en ces deux quarrez 64, 16, dont les côtez ſont 8, 4.

Double Egalité de Diophante 17. 3.

C'eſt encore de la même façon que l'on reſoudra cette Double Egalité,

$$10N+9.$$
$$5N+4.$$

dont Diophante n'a donné qu'une ſolution dans 17. 3. & quoique Bachet aſſûre que par la Methode de Diophante on n'en puiſſe donner qu'une ſolution, parce qu'on ne peut prendre, à ce qu'il dit, que 5, 1N+1, pour les deux nombres produiſans, nous ferons neanmoins voir le contraire, dans la Methode de Diophante, que nous expliquerons après avoir reſolu cette Double Egalité par la nôtre, pour ne rien laiſſer à deviner.

Egalez donc la premiere Puiſſance 10N+9 au quarré aa, pour avoir $1N \gtrless \frac{aa-9}{10}$: & la deuxiéme 5N+4 au quarré bb, pour avoir la même $1N \gtrless \frac{bb-4}{5}$, & par conſéquent cette Equation, $\frac{aa-9}{10} \gtrless \frac{bb-4}{5}$, dans laquelle on trouvera $b \gtrless \sqrt{\frac{aa-1}{2}}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $\frac{aa-1}{2}$: multipliez-la par le

le nombre quarré 4, pour avoir en entiers cette autre Puiſſance à égaler au quarré $2aa-2$. Pour cette fin ſuppoſez $a \mathrel{)\!(} x+1$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré $2xx+4x$, pour le côté duquel prenant $\frac{cx}{d}$, l'on trouvera $x \mathrel{)\!(} \frac{4dd}{cc-2dd}$, & par conſéquent $a \mathrel{)\!(} \frac{cc+2dd}{cc-2dd}$, $b \mathrel{)\!(} \frac{2cd}{cc-2dd}$, & au lieu de $1N \mathrel{)\!(} \frac{aa-9}{10}$, ou de $1N \mathrel{)\!(} \frac{bb-4}{5}$, l'on aura $1N \mathrel{)\!(} \frac{40ccdd-8c^4-32d^4}{10c^4-40ccdd+40d^4}$, & la Double Egalité propoſée $10N+9$, $5N+4$, ſe changera en ces deux quarrez,

$$\frac{c^4+4ccdd+4d^4,\ 4ccdd.}{c^4-4ccdd+4d^4}$$

dont les côtez ſont $\frac{cc+2dd,\ 2cd}{cc-2dd}$.

Si l'on ſuppoſe $c \mathrel{)\!(} 3$, & $d \mathrel{)\!(} 2$, on trouvera $a \mathrel{)\!(} 17$, $b \mathrel{)\!(} 12$, $x \mathrel{)\!(} 16$, & $1N \mathrel{)\!(} 28$, & la Double Egalité propoſée ſe changera en ces deux quarrez 289, 144, dont les côtez ſont 17, 12, comme Diophante.

Mais ſi l'on ſuppoſe $c \mathrel{)\!(} 17$, & $d \mathrel{)\!(} 12$, on trouvera $a \mathrel{)\!(} 577$, $b \mathrel{)\!(} 408$, $x \mathrel{)\!(} 576$, & $1N \mathrel{)\!(} 332992$, & la Double Egalité propoſée ſe changera en ces deux quarrez 332929, 166464, dont les côtez ſont 577, 408.

On peut donner une infinité d'autres ſolutions en nombres entiers, pourvû que c ſoit plus grand que d, ou bien moindre que $2d$. Comme ſi l'on ſuppoſe $c \mathrel{)\!(} 4$, & $d \mathrel{)\!(} 3$, on trouvera $a \mathrel{)\!(} -17$, $b \mathrel{)\!(} -12$, $x \mathrel{)\!(} -18$, & $1N \mathrel{)\!(} 28$, comme auparavant.

Mais ſi l'on ſuppoſe $c \mathrel{)\!(} 577$, & $d \mathrel{)\!(} 408$, on trouvera $a \mathrel{)\!(} 665857$, $b \mathrel{)\!(} 570832$, $x \mathrel{)\!(} 665856$, & $1N \mathrel{)\!(} 651698344444$, & la Double Egalité propoſée ſe changera en ces deux quarrez, 651698344449, 325849172224,

3258491722224, dont les côtez ſont 66587, 570832.

Methode de Diophante.

Pour reſoudre maintenant la premiere Double Egalité propoſée

$$\begin{matrix} 2ax+ab. \\ 8ax+3ab. \end{matrix}$$

par la methode de Diophante, où la raiſon des deux premiers termes $2ax$, $8ax$, eſt égale à celle des deux quarrez 1, 4; parce que ces deux premiers termes ne ſont pas égaux, on les rendra égaux en multipliant chaque Puiſſance reciproquement par les quarrez 1, 4, qui expriment la raiſon de leurs premiers termes, ſçavoir la premiere Puiſſance $2ax+ab$ par le quarré 4, & la deuxiéme $8ax+3ab$ par le quarré 1, pour avoir ces deux autres Puiſſances à égaler au quarré,

$$\begin{matrix} 8ax+4ab. \\ 8ax+3ab. \end{matrix}$$

Prenant la deuxiéme $8ax+3ab$ pour la plus petite, comme elle l'eſt effectivement, ôtez-la de la plus grande $8ax+4ab$, pour avoir les differences ab, dont les deux nombres produiſans ſont c, $\frac{ab}{c}$, le premier c étant indéterminé. La moitié de la ſomme de ces deux nombres produiſans eſt $\frac{cc+ab}{2c}$, & la moitié de leur difference eſt $\frac{cc...ab}{2c}$. Si on égale le quarré $\frac{c^4+2abcc+aabb}{4cc}$ de la moitié de la ſomme à la plus grande Puiſſance $8ax+4ab$, ou bien le quarré $\frac{c^4-4abcc+aabb}{4cc}$ de la moitié de la difference à la plus petite Puiſſance $8ax+3ab$, l'on trouvera x ☉ $\frac{c^4-14abcc+aabb}{32acc}$, comme auparavant.

Cette

Cette methode ſe peut appliquer à une Double Egalité, où les premiers termes ne ſont pas dans la raiſon de deux quarrez, pourvû que le dernier dans chaque Puiſſance ſoit quarré, mais il y a une précaution à prendre touchant les deux nombres produiſans, comme vous allez voir.

Double Egalité où les derniers termes ſont quarrez.

Propoſons cette Double Egalité;

$$\begin{array}{l} ax+bb. \\ bx+cc. \end{array}$$

Prenant la deuxiéme Puiſſance $bx+cc$ pour la plus petite, ôtez-la de la plus grande $ax+bb$, pour avoir leur difference $ax-bx+bb-cc$, dont le dernier terme $bb-cc$ étant la difference de deux quarrez eſt diviſible par la ſomme $b+c$, ou par la difference $b-c$ de leurs côtez. Ainſi $b+c$, & $b-c$, en ſont les deux parties aliquotes, dont l'une, comme $b+c$ ſera priſe pour l'un des deux nombres produiſans, & l'autre nombre produiſant ſera $\frac{ax-bx}{b+c}+b-c$. La moitié de la ſomme de ces deux nombres produiſans eſt $\frac{ax-bx}{2b+2c}+b$, & la moitié de leur difference eſt $\frac{ax-bx}{2b+2c}-c$. Si on égale le quarré de la moitié de la ſomme $\frac{ax-bx}{2b+2c}+b$, à la plus grande Puiſſance $ax+bb$, ou bien le quarré de la moitié de la difference $\frac{ax-bx}{2b+2c}-c$, à la plus petite Puiſſance $bx+cc$, l'on trouvera $x \propto \frac{4b^3+4bbc+4abc+4acc}{aa-2ab+bb}$, & la Double Egalité propoſée ſe changera en ces deux quarrez,

$$\frac{b^4+2ab^3+aabb+4abbc+4aabc+4aacc}{aa-2ab+bb}.$$

$4b^4+4b^3c+bbcc+4abb+2abcc+aacc$

$aa-2ab+bb$

dont les côtez ſont $\frac{bb+ab+2ac,\ 2bb+ac+bc}{a\ .\ b}$.

Si $a \propto 4$, $b \propto 3$, & $c \propto 1$, on trouvera $x \propto 208$, & la Double Egalité propoſée $ax+bb$, $bx+cc$, ou $4x+9$, $3x+1$, ſe changera en ces deux quarrez 841, 625, dont les côtez ſont 29, 25.

On peut reſoudre autrement une ſemblable Double Egalité, ſçavoir en la reduiſant à une autre, où le dernier terme dans chaque Puiſſance ſoit un même quarré, ce qui ſe fera en multipliant chaque Puiſſance par le dernier terme de l'autre: car ainſi on aura une autre Double Egalité, où le dernier terme de chaque Puiſſance ſera un même nombre quarré, ſçavoir le produit des deux derniers termes de la Double Egalité propoſée. Mais pour reſoudre cette nouvelle Double Egalité par la methode de Diophante, on prendra le double du côté du quarré commun, qui ſe trouve dans chaque Puiſſance, pour l'un des deux nombres produiſans.

Ainſi des deux Puiſſances propoſées,

$ax+bb.$

$bx+cc.$

on multipliera la premiere $ax+bb$ par le quarré cc, & la deuxiéme $bx+cc$ par le quarré bb, & l'on aura cette autre Double Egalité,

$accx+bbcc.$

$b^3x+bbcc.$

que l'on reſoudra en cette ſorte.

Prenant la premiere Puiſſance $accx+bbcc$, pour la plus grande, ôtez-en la plus petite $b^3x+bbcc$, pour avoir leur difference $accx-b^3x$, dont les deux nombres produiſans ſont $2bc$, $\frac{accx-b3x}{2bc}$, le premier

mier $2bc$ étant le double du côté du quarré commun $bbcc$. La moitié de la ſomme de ces deux nombres produiſans eſt $\frac{accx-b^3x}{4bc}+bc$, dont le quarré $\frac{aac^4-2ab^3cxx+b^6xx}{16bbcc}+\frac{accx-b^3x}{2bc}+bbcc$, étant égalé à la plus grande Puiſſance $accx+bbcc$, l'on trouvera $x \mathrel{)\!(} \frac{8a\,bc^4+8b^5cc}{aac^4-2ab^3cc+b^6}$, & les deux Puiſſances propoſées ſe changeront en ces deux quarrez,

$$\frac{b^8+6ab^5cc+9aabbc^4,\ aac^6+6ab^3c^4+9b^6cc}{aac^4-2ab^3cc+b^6},$$

dont les côtez ſont $\frac{b^4+3abcc,\ ac^3+3b^3c}{acc\ldots b^3}$.

Parce que nous avons ſuppoſé $a \mathrel{)\!(} 4$, $b \mathrel{)\!(} 3$, & $c \mathrel{)\!(} 1$, on trouvera $x \mathrel{)\!(} \frac{2211}{529}$, & les deux Puiſſances propoſées $ax+bb$, $bx+cc$, ou $4x+9$, $3x+1$, ſe changeront en ces deux quarrez $\frac{13689}{529}\ \frac{7225}{529}$, dont les côtez ſont $\frac{117}{23}\ \frac{85}{23}$.

Double Egalité de Diophante, 17. 3.

De même pour reſoudre cette Double Egalité, de Diophante,

$$10N+9.$$
$$5N+4.$$

dont il a trouvé une ſolution par ſa premiere methode, ſçavoir $1N \mathrel{)\!(} 28$: multipliez-la premiere Puiſſance $10N+9$ par le nombre quarré 4, & la deuxiéme $5N+5$ par le nombre quarré 9, pour avoir cette autre Double Egalité,

$$40N+36.$$
$$45N+36.$$

que l'on reſoudra ainſi.

La difference de ces deux Puiſſances eſt $5N$, dont les deux nombres produiſans ſont 12, $\frac{5N}{12}$, le premier 12 étant égal au double du côté 6 du quarré commun 36. La moitié de la ſomme de ces deux nombres pro-

duiſans eſt $\frac{5N}{24}+6$, dont le quarré $\frac{25}{576}+\frac{5}{12}N+36$ étant égalé à la plus grande Puiſſance $45N+36$, l'on trouvera $1N\mathrel{\rlap{)}(}\frac{4896}{5}$, & la Double Egalité propoſée $10N+9$, $5N+4$, ſe changera en ces deux quarrez 9801, 4900, dont les deux côtez ſont 99, 70.

Reſoudre infiniment une Double Egalité.

Si vous voulez une autre ſolution par le moyen de la précedente, où nous avons trouvé $1N\mathrel{\rlap{)}(}\frac{4896}{5}$, ou plus facilement par le moyen de celle de Diophante, qui a trouvé $1N\mathrel{\rlap{)}(}28$, ſuppoſez $1N\mathrel{\rlap{)}(}x+28$, & au lieu de la Double Egalité propoſée $10N+9$, $5N+4$, vous aurez celle-ci,

$$10x+289.$$
$$5x+144.$$

que l'on reſoudra en cette ſorte.

Multipliez la premiere Puiſſance $10x+289$, par le quarré 144, & la deuxiéme $5x+144$ par le quarré 289, pour avoir ces deux autres Puiſſances,

$$1440x+41616.$$
$$1445x+41616.$$

dont la difference eſt $5x$, laquelle a ces deux nombres produiſans 408, $\frac{5x}{408}$, dont la moitié eſt $204+\frac{5x}{816}$, dont le quarré $41616+\frac{5}{4}x+\frac{25xx}{665856}$, étant égalé à la plus grande Puiſſance $1445x+41616$, on trouvera $x\mathrel{\rlap{)}(}\frac{1920994}{5}$, & par conſéquent $1N\mathrel{\rlap{)}(}\frac{9210995}{5}$, & la Double Egalité propoſée $10N+9$, $5N+4$, ſe changera en ces deux quarrez, 384199201, 192099600, dont les côtez ſont 19601, 13860.

Il eſt évident que l'on peut de la même façon trouver une autre ſolution par le moyen de cette derniere, & ainſi à l'infini. Mais nous avons une autre methode pour reſoudre infiniment de ſemblables Doubles Egalitez, qui eſt beaucoup plus facile que la précedente, comme

comme vous allez voir dans la même Double Egalité de Diophante,

$$\begin{array}{l} 10N+9. \\ 5N+4. \end{array}$$

lequel pour trouver la valeur de 1N a pris 5, 1N+1, pour les deux nombres produiſans de la difference 5N+5.

Autre methode pour reſoudre infiniment une Double Egalité.

C'eſt pourquoi pour avoir une autre ſolution, changez les deux nombres produiſans 5, 1N+1, en ces deux autres, $5x$, $\frac{1N+1}{x}$. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{5xx+1N+1}{2x}$, dont le quarré $\frac{25}{4}xx+\frac{10N}{4}+\frac{1Q}{4xx}+\frac{1}{2}+\frac{1N}{2xx}+\frac{1}{4xx}$ étant égalé à la plus grande Puiſſance 10N+9, l'on trouvera $1N \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} 15xx-1+\sqrt{100x^4-4xx}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré $200x^4-4xx$, ou en moindres termes $50xx-1$, ce qui eſt facile, parce que la ſomme 49 des unitez eſt un nombre quarré. Suppoſez donc $x \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} y+1$, ou bien pour avoir de plus petits nombres, ſuppoſez $x \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} y-1$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $50yy-100y+49$, pour le côté duquel prenant $7 \ldots \frac{ay}{b}$, l'on trouvera $y \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} \frac{100bb-14ab}{50bb-aa}$, & par conſéquent $x \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} \frac{50bb-14ab+aa}{50bb-aa}$, &c.

Si l'on ſuppoſe $a \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} 7$, & $b \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} 1$, l'on trouvera $y \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} 2$, $x \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} 1$, & $1N \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} 28$, comme Diophante. Mais ſi l'on ſuppoſe $a \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} 4$, & $b \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} 1$, on trouvera $y \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} \frac{22}{17}$, $x \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} \frac{5}{17}$, & $1N \mathrel{\text{)}\!\!\text{)}} \frac{196}{289}$, & la Double Egalité propoſée 10N+9, 1N+4, ſe changera en ces deux quarrez $\frac{6561}{289}, \frac{3136}{289}$ dont les côtez ſont $\frac{81}{17}, \frac{56}{17}$.

La regle la plus générale eſt de ſuppoſer $x \mathrel{)\!(} y+1$, parce que dans la Puiſſance $50xx-1$, la ſomme 49 des unitez étant un nombre quarré, cela fait connoître que l'on peut ſuppoſer $x \mathrel{)\!(} 1$, ce qui donne 28 pour 1N. C'eſt pourquoi pour avoir une autre ſolution, on doit ſuppoſer $x \mathrel{)\!(} y+1$, & alors au lieu de la Puiſſance $50xx-1$, on aura celle-ci, à égaler au quarré, $50yy+$ $10y+49$, pour le côté duquel prenant $7 \ldots \frac{ay}{b}$, on trouvera $y \mathrel{)\!(} \frac{100bb+14ab}{aa+14ab+50bb}$, & par conſéquent $x \mathrel{)\!(} \frac{aa-50bb}{aa-50bb}$, &c.

Si l'on ſuppoſe $a \mathrel{)\!(} 7$, & $b \mathrel{)\!(} 1$, on trouvera $y \mathrel{)\!(} -198$, $x \mathrel{)\!(} -197$, & 1N $\mathrel{)\!(}$ 1130976, & la Double Egalité propoſée $10N+9$, $5N+4$, ſe changera en ces deux quarrez, 1309769, 5654884, dont les côtez ſont 3363, 2378.

Solution infinie en nombres entiers.

Si l'on veut que la ſolution ſe faſſe toûjours en nombres entiers, on ne doit pas donner aux quantitez indéterminées a, b, une autre raiſon que celle de 7 à 1, généralement parlant, & alors on pourra reſoudre la Double Egalité propoſée infiniment en nombres entiers.

Car puiſque nous avons trouvé $y \mathrel{)\!(} -198$, ſi l'on ſuppoſe $y \mathrel{)\!(} z-198$, au lieu de la Puiſſance précedente $50yy+100y+49$, on aura celle-ci à égaler au quarré, $50zz-19700z+1940449$, pour le côté duquel prenant $1393+\frac{az}{b}$, l'on trouvera $z \mathrel{)\!(} \frac{19700b+2786ab}{50bb-aa}$, & par conſéquent $y \mathrel{)\!(} \frac{9800bb+2786ab+198aa}{50bb-aa}$, $x \mathrel{)\!(} \frac{9^{\circ}50bb+2786ab+197aa}{50bb-aa}$, &c.

Si l'on ſuppoſe $a \mathrel{)\!(} 7$, & $b \mathrel{)\!(} 1$, on trouvera $z \mathrel{)\!(} 39202$, $y \mathrel{)\!(} 39004$, $x \mathrel{)\!(} 39005$, & 1N $\mathrel{)\!(}$ 4433655444, & la Double

Double Egalité propoſée 10N+9, 5N+4, ſe changera en ces deux quarrez 44336554449, 221682772224, dont les côtez ſont 665857, 470832.

Nous avons dit que généralement parlant, on ne doit pas donner aux deux quantitez indéterminées a, b, une autre raiſon que celle des deux nombres 7, 1, quoi qu'on en puiſſe changer la raiſon, & leur donner d'autres valeurs, qui rendront le Dénominateur $50bb-aa$ toûjours égal à l'unité, afin que la ſolution ſe faſſe en entiers : parce que ces deux nombres 7, 1, ſervent généralement pour cela, comme vous allez voir.

Si donc on ſuppoſe $50bb-aa \propto 1$, on trouvera $a \propto \sqrt{50bb-1}$, & l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $50bb-1$, ce qui ſera facile, parce que la ſomme 49 des unitez eſt un nombre quarré. Suppoſez donc $b \propto \omega+1$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $50\omega\omega+100\omega+49$, pour le côté duquel prenant $7-\frac{c\omega}{d}$, on trouvera $\omega \propto \frac{14cd+100dd}{-50dd+cc}$, & par conſéquent $b \propto \frac{14cd+50dd+cc}{-50dd+cc}$, &c.

Si l'on ſuppoſe $c \propto 7$, & $d \propto 1$, on trouvera $\omega \propto -198$, $b \propto -197$, & $a \propto 1393$: & ſi l'on ſe ſert de ces deux dernieres valeurs trouvées 197, 1393, en ſuppoſant $c \propto 1393$, & $d \propto 197$, on trouvera d'autres valeurs pour a & b. & ainſi en ſuite.

Double Egalité de Bachet, reſoluë infiniment, 45. 4.

C'eſt de la même façon que l'on reſoudra infiniment la premiere Double Egalité de Bachet,

3N+13.
1N+7.

où la difference des deux Puiſſances eſt 2N+6, dont les deux nombres produiſans ſont 2, 1N+3 : ſçavoir en multipliant le premier produiſant 2

par le nombre indéterminé $\frac{a}{b}$, & en diviſant le deuxiéme $1N+3$ par le même nombre indéterminé $\frac{a}{b}$, pour avoir ces deux autres nombres produiſans, $\frac{2ab}{b}, \frac{bbN+3b}{a}$. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{2aa+bbN+3bb}{2ab}$, dont le quarré $\frac{4a^4+4aabbN+b^4N^2+12aabb+6b^4N+9b^4}{4aabb}$ étant égalé à la plus grande Puiſſance $3N+13$, on trouvera $1N \gtrless \frac{4aa-2bb+2\sqrt{bb+3aa}}{bb}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $4bb+3aa$, pour le côté duquel prenant $2b...\frac{ac}{d}$, l'on trouvera en entiers, $a \gtrless 4cd$, & $b \gtrless cc...3dd$, &c.

Si l'on ſuppoſe $c \gtrless 2$, & $d \gtrless 1$, on trouvera $a \gtrless 8$, $b \gtrless 1$, & $1N \gtrless 477$, comme auparavant: mais ſi l'on ſuppoſe $c \gtrless 26$, & $d \gtrless 15$, on trouvera $a \gtrless 1560$, $b \gtrless 1$, & $1N \gtrless 1816,4637$, & la Double Egalité propoſée $3N+13$, $1N+7$, ſe changera en ces deux quarrez 54493924, 18164644, dont les côtez ſont 7382, 4262.

Que ſi l'on ſuppoſe $c \gtrless 362$, & $d \gtrless 209$, on trouvera $a \gtrless 302632$, $b \gtrless 1$, & $1N \gtrless 683608161629$, & la Double égalité propoſée $3N+13$, $1N+7$, ſe changera en ces deux quarrez 2050824484900, 683608161636, dont les côtez ſont 1432070, 826806.

Solutions infinies en nombres entiers.

On peut donner une infinité d'autres ſolutions en nombres entiers, car il n'y a qu'à faire que la quantité indéterminée b vaille toûjours 1; ce qui ſe fera en égalant à 1 ſa valeur trouvée $cc...3dd$, par cette Equation, $cc-3dd \gtrless 1$, dans laquelle on trouvera $c \gtrless \sqrt{3dd+1}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré

$3dd+1$, 2

$3dd+1$, ce qui ſera facile, parce que la ſomme 4 des unitez eſt un nombre quarré. Suppoſez donc $d \mathrel{)\!(} x+1$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $3xx+6x+4$, pour le côté duquel prenant $2 \ldots \frac{mx}{n}$, on trouvera $x \mathrel{)\!(} \frac{6mn+4mn}{mm-3nn}$, & par conſéquent $d \mathrel{)\!(} \frac{mm+4mn+3nn}{mm-3nn}$, & $c \mathrel{)\!(} \frac{2mm+6mn+6nn}{mm-3nn}$.

Si l'on ſuppoſe $m \mathrel{)\!(} 2$, & $n \mathrel{)\!(} 1$, on trouvera $x \mathrel{)\!(} 14$, $c \mathrel{)\!(} 26$, & $d \mathrel{)\!(} 15$: mais ſi l'on ſuppoſe $m \mathrel{)\!(} 26$, & $n \mathrel{)\!(} 15$, on trouvera $c \mathrel{)\!(} 5042$, & $d \mathrel{)\!(} 2891$. On peut auſſi ſuppoſer $m \mathrel{)\!(} 7$, & $n \mathrel{)\!(} 4$, & alors on trouvera $c \mathrel{)\!(} 362$, & $d \mathrel{)\!(} 209$, &c.

Ou bien parce que nous avons trouvé $x \mathrel{)\!(} 14$, ſuppoſez $x \mathrel{)\!(} y+14$, & au lieu de la Puiſſance précedente $3xx+6x+4$, vous aurez celle-ci à égaler au quarré, $3yy+90y+676$, pour le côté duquel prenant $26 \ldots \frac{py}{q}$, on trouvera $y \mathrel{)\!(} \frac{90qq+52pq}{pp-3qq}$, & par conſéquent $x \mathrel{)\!(} \frac{14pp+52pq+48qq}{pp-3qq}$, &c.

Si l'on ſuppoſe $p \mathrel{)\!(} 2$, & $q \mathrel{)\!(} 1$, on trouvera $y \mathrel{)\!(} 194$, & $x \mathrel{)\!(} 208$: mais ſi l'on ſuppoſe $p \mathrel{)\!(} 7$, & $q \mathrel{)\!(} 4$, on trouvera $y \mathrel{)\!(} 2896$, $x \mathrel{)\!(} 2910$, $c \mathrel{)\!(} 5032$, $d \mathrel{)\!(} 2911$, &c.

Solution plus générale.

Si vous voulez une ſolution autant générale qu'elle le peut être pour la Double Egalité propoſée au lieu

$$\begin{matrix} 3N+13. \\ 1N+7. \end{matrix}$$

de mettre 2, $1N+3$, pour les deux nombres produiſans de la difference $2N+6$, de ces deux Puiſſances $3N+13$, $1N+7$, mettez x, $\frac{2N+6}{x}$, & alors par

la

la methode précedente, les deux autres nombres produisans seront $\frac{ax}{b}$, $\frac{2bN+6b}{ax}$. La moitié de leur somme est $\frac{ax}{2b}+\frac{6N+3b}{ax}$, dont le quarré $\frac{aaxx}{4bb}+1N+3b+\frac{bb\square+6b\cdot+9bb}{aaxx}$ étant égalé à la plus grande Puissance $3N+13$, l'on trouvera $1N\mathrel{\text{Ø}}\frac{aaxx-12bb+\frac{1}{2}x\sqrt{16b+3aaxx}}{4bb}$.

Ainsi l'on aura cette Puissance à égaler au quarré, $16bb+3aaxx$, pour le côté duquel prenant $4b\ldots\frac{ccx}{bd}$, l'on trouvera en entiers $a\mathrel{\text{Ø}}8cd$, & $b\mathrel{\text{Ø}}ccx-3ddx$, &c.

Si l'on suppose $c\mathrel{\text{Ø}}2$, $d\mathrel{\text{Ø}}1$, & $x\mathrel{\text{Ø}}2$, on trouvera $a\mathrel{\text{Ø}}16$, $b\mathrel{\text{Ø}}2$. & $1N\mathrel{\text{Ø}}477$, comme auparavant: & si l'on suppose $c\mathrel{\text{Ø}}7$, $d\mathrel{\text{Ø}}4$, & $x\mathrel{\text{Ø}}1$, on trouvera $a\mathrel{\text{Ø}}224$, $b\mathrel{\text{Ø}}1$, & $1N\mathrel{\text{Ø}}93629$, & la Double Egalité proposée $3N+13$, $1N+7$, se changera en ces deux quarrez 280900, 93636, dont les côtez sont 530, 306.

Que si l'on suppose $c\mathrel{\text{Ø}}3$, $d\mathrel{\text{Ø}}1$, & $x\mathrel{\text{Ø}}\frac{1}{2}$, on trouvera $a\mathrel{\text{Ø}}24$, $b\mathrel{\text{Ø}}1$, & $1N\mathrel{\text{Ø}}29$, comme Bachet.

Comme la Puissance $16bb+3aaxx$ se peut égaler au quarré, quelque valeur que l'on donne à la quantité indéterminée x, comme vous avez vû, l'on connoît que dans la Double Egalité proposée $3N+13$, $1N+7$, on peut prendre à discretion l'un des deux nombres produisans.

Autre Double Egalité de Bachet, 45. 4.

Il n'arrive pas la même chose dans la seconde Double Egalité de Bachet,

$$6N+25.$$
$$2N+3.$$

C'est pourquoi nous mettrons x pour l'un des deux nombres

nombres produiſans de la difference $4N+22$, & l'autre produiſant ſera $\frac{4N+22}{x}$, & l'on changera comme auparavant les deux nombres produiſans $x, \frac{4N+22}{x}$, en ces deux autres $\frac{ax}{b}, \frac{4bN+22b}{ax}$, qui leur ſont reciproquement proportionnels. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{ax}{20}+\frac{2bN+11b}{ax}$, dont le quarré $\frac{aaxx}{4bb}+2N+11+\frac{4bbQ+44bbN+121bb}{aaxx}$ étant égalé à la plus grande Puiſſance $6N+25$, l'on trouvera $1N \mathrel{\text{)o}} \frac{2aaxx-22bb+ax\sqrt{3aaxx-32bb}}{4bb}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $3aaxx-32bb$, pour le côté duquel prenant ax, on trouvera $x \mathrel{\text{)o}} \frac{4b}{a}$, & par conſéquent $1N \mathrel{\text{)o}} 1\frac{1}{2}$, comme Bachet.

Pour avoir une ſolution plus générale, il faut autrement égaler au quarré la Puiſſance précedente $3aaxx-32bb$, ce qui ſeroit facile, ſi la ſomme des unitez étoit un nombre quarré. Pour cette fin, ſuppoſez $a \mathrel{\text{)o}} 4$, & $b \mathrel{\text{)o}} 1$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $48xx-32$, ou en moindres termes, $3xx-2$, où la ſomme 1 des unitez eſt un nombre quarré. C'eſt pourquoi l'on ſuppoſera $x \mathrel{\text{)o}} y+1$, & l'on aura cette derniere Puiſſance à égaler au quarré, $3yy+6y+1$, pour le côté duquel prenant $1 \ldots \frac{cy}{d}$, on trouvera $y \mathrel{\text{)o}} \frac{6dd+2cd}{cc-3dd}$, & par conſéquent $x \mathrel{\text{)o}} \frac{cc+2cd+3dd}{cc-3dd}$, &c.

Si l'on ſuppoſe $c \mathrel{\text{)o}} 2$, & $d \mathrel{\text{)o}} 1$, on trouvera $y \mathrel{\text{)o}} 10$, $x \mathrel{\text{)o}} 11$, & $1N \mathrel{\text{)o}} 1\frac{97}{2}$, & la Double Egalité propoſée $6N+25$, $2N+3$, ſe changera en ces deux quarrez 10816, 3600, dont les côtez ſont 104, 60.

Au

Au lieu de ſuppoſer $x \gtrless y+1$, l'on peut ſuppoſer $x \gtrless y \ldots 1$, & alors au lieu de la Puiſſance $3xx-2$, on aura celle-ci à égaler au quarré, $3yy-6y+1$, pour le côté duquel prenant $1 \ldots \frac{cy}{d}$, on trouvera $y \gtrless \frac{2cd-6dd}{cc-3dd}$, & par conſéquent $x \gtrless \frac{cc-2cd+3dd}{cc-3dd}$, &c.

Si l'on ſuppoſe $c \gtrless 2$, & $d \gtrless 1$, l'on trouvera $y \gtrless -2$, $x \gtrless 3$, & $1N \gtrless \frac{25}{25}$, & la Double Egalité propoſée $6N+25$, $2N+3$, ſe changera en ces deux quarrez 784, 256, dont les côtez ſont 28, 16.

Pour vous faire voir l'élegance de cette ſeconde methode, & l'avantage qu'elle a par deſſus la premiere, nous propoſerons encore cette Double Egalité,

$$\begin{matrix} ax+aa. \\ bx+bb. \end{matrix}$$

qui ſera premierement reſoluë indéfiniment par nôtre ſeconde methode, en cette ſorte.

Prenant la premiere Puiſſance $ax+aa$, pour la plus grande, ôtez en la deuxiéme $bx+bb$, pour avoir leur difference $ax-bx+aa-bb$, dont les deux nombres produiſans ſont $a-b$, $x+a+b$, qui ne ſont pas propres à reſoudre cette Double Egalité. C'eſt pourquoi on multipliera le premier $a-b$, par le nombre indéterminé $\frac{c}{d}$, & on diviſera le deuxiéme $x+a+b$, par le même nombre $\frac{c}{d}$, & l'on aura ces deux autres nombres produiſans, $\frac{ac-bc}{d}$, $\frac{dx+ad+bd}{c}$. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{ac-bc}{2d}+\frac{dx+ad+bd}{2c}$, dont le quarré, $\frac{accc-2abcc+bbcc}{4dd}+\frac{ddxx+2addx+aadd+2bddx+2abdd+bbdd}{4cc}$ $+\frac{ax+aa-bx-bb}{2}$ étant égalé à la plus grande Puiſſance

$ax+$

$ax+aa$, l'on trouvera $x \propto \frac{acc+bcc-bdd+\sqrt{4abc^4-4abccdd}}{ad}$.

Il faut donc égaler au quarré cette Puiſſance, $4abc^4-4abccdd$, ou en moindres termes, $abcc-abdd$. Pour cette fin, ſuppoſez $d \propto y...c$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $2abcy+abyy$, pour le côté duquel prenant my, l'on trouvera en entiers, $y \propto 2ab$, & $c \propto ab+mm$, & par conſéquent $d \propto ab...mm$, & $x \propto 8abm^4-8a^3bbm^4-8aab^3m^4+4a^4b^3mm+4a^4b^4m$, le tout étant diviſé par $m^8-4abm^6+6aabbm^4-4a^3b^3mm+a^4b^4$.

Si a vaut 2, & que b vaille 1, & que l'on ſuppoſe $m \propto 1$, l'on trouvera $c \propto 3$, $y \propto 4$, & $x \propto 48$, & les deux Puiſſances propoſées, $ax+aa$, $bx+bb$, ou $2x+4$, $x+1$, ſe changeront en ces deux quarrez 100, 49, dont les côtez, ſont 10, 7.

Cette Double Egalité ſe peut reſoudre plus facilement en cette ſorte. Egalez la premiere Puiſſance $ax+aa$, au quarré cc, pour avoir $x \propto \frac{cc-aa}{a}$, & la deuxiéme $bx+bb$, au quarré dd, pour avoir le même $x \propto \frac{dd-bb}{b}$. C'eſt pourquoi l'on aura cette Equation, $\frac{cc-aa}{a} \propto \frac{dd-bb}{b}$, dans laquelle on trouvera $ad \propto \sqrt{abcc-a^3b+aabb}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $abcc-a^3b+aabb$. Pour cette fin ſuppoſez $c \propto y+a$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $aabb+abyy+2aaby$, pour le côté duquel prenant $ab...my$, l'on trouvera $y \propto \frac{2abm+2aab}{mm-ab}$, & par conſéquent $c \propto \frac{amm+2abm+aab}{mm-ab}$, $d \propto \frac{abb+2abm+amm}{mm-ab}$, & $x \propto \frac{4abbmm+4a^2bbm+4ab^3+4a^2bm}{m^4-2abmm+aabb}$.

Par-

Parce que nous avons ſuppoſé $a \gtrless 2$, & $b \gtrless 1$, ſi l'on ſuppoſe $m \gtrless 2$; on trouvera $y \gtrless 8$, $c \gtrless 10$, $d \gtrless 7$, & $x \gtrless 48$, comme auparavant.

On peut encore reſoudre la même Double Egalité,

$$\begin{array}{l} ax+aa. \\ bx+bb. \end{array}$$

par la methode de Diophante, en multipliant la premiere Puiſſance $ax+aa$, par le quarré bb, & la deuxiéme $bx+bb$, par le quarré aa, pour avoir cette autre Double Egalité,

$$\begin{array}{l} abbx+aabb. \\ aabx+aabb. \end{array}$$

Prenant la premiere $abbx+aabb$, pour la plus grande, ôtez-en la plus petite $aabx+aabb$, pour avoir leur difference $abbx-aabx$, dont les deux nombres produiſans ſeront $2ab, \frac{bx-ax}{2}$. La moitié de leur ſomme eſt $ab+\frac{bx-ax}{4}$, dont le quarré $aabb+\frac{abbx-aabx}{2}+\frac{bbxx-2abxx+aaxx}{16}$ étant égale à la plus grande Puiſſance $abbx+aabb$, l'on trouvera $x \gtrless \frac{8aab+8abb}{aa-2ab+bb}$.

Parce que l'on a ſuppoſé $a \gtrless 2$, & $b \gtrless 1$, l'on trouvera $x \gtrless 48$, comme auparavant.

Reſoudre une Double Egalité par une Triple Egalité.

Enfin la même Double Egalité propoſée,

$$\begin{array}{l} ax+aa. \\ bx+bb. \end{array}$$

ſe peut encore reſoudre en lui ajoûtant une troiſiéme Puiſſance de même forme, comme $cx+cc$, pour avoir cette Triple Egalité,

$$\begin{array}{l} ax+aa. \\ bx+bb. \\ cx+cc. \end{array}$$

laquelle étant reſoluë par les preceptes du Chapitre ſuivant, on trouvera $x \gtrless \frac{168}{239}$, en ſuppoſant $a \gtrless 2$, $b \gtrless 1$,

$b \propto 1$, & $c \propto 3$, & la Triple Egalité précedente $ax+aa$, $bx+bb$, $cx+cc$, ou $2x+4$, $x+1$, $3x+9$, se changera en ces trois quarrez, $\frac{5471, 2209, 9801}{529}$, dont les côtez, ou Racines quarrées sont $\frac{74 \cdot 47 \cdot 99}{23}$.

Double Egalité où il y a plusieurs lettres indéterminées.

Proposons encore cette Double Egalité,

$$mx-yz.$$
$$my-xz.$$

où il y a trois quantitez indéterminées, sçavoir x, y, z. Si vous prenez la premiere $mx-yz$ pour la plus grande, & que vous en ôtiez la deuxiéme $my-xz$, vous aurez $mx-my+xz-yz$ pour leur difference, dont les deux nombres produisans sont $x-y$, $m+z$. La moitié de leur somme est $\frac{x-y+z+m}{2}$, dont le quarré $\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}yy+\frac{1}{2}xz-\frac{1}{2}yz+\frac{1}{4}zz+\frac{1}{2}mx-\frac{1}{2}my+\frac{1}{2}mz+\frac{1}{4}mm$, étant égalé à la plus grande Puissance $mx-yz$, l'on trouvera cette Equation, $xx-2xy+yy+2xz+2yz+zz-2mx-2my+2mz+mm \propto 0$, où prenant la plus proche Racine quarrée, l'on aura $x-y+z-m$, & le reste sera $4yz-4my+4mz$. C'est pourquoi si l'on ôte ce reste de chaque membre de l'Equation précedente, l'on aura cette autre Equation, $xx-2xy+yy+2xz-2yz-2mx+2my-2mz+mm \propto 4my-4mz-4yz$, & par la Racine quarrée on aura celle ci, $x-y+z-m \propto \sqrt{+4my-4mz-4yz}$. Ainsi l'on aura cette Puissance à égaler au quarré, $4my-4mz-4yz$, pour le côté duquel prenant $2a$, en sorte qu'on ait cette Equation, $4my-4mz-4yz \propto 4aa$, l'on trouvera $y \propto \frac{aa+mz}{m-z}$, & par conséquent $x \propto \frac{aa+2am-2mz+zz+mm}{m-z}$, & les deux Puissances proposées $mx-yz$, $my-xz$, se changeront

geront en ces deux quarrez, $aa+2am+mm$, $aa-2az+zz$, dont les côtez ſont $a+m$, $a-z$.

C'eſt pourquoi ſi m vaut 2, & que l'on ſuppoſe $a \propto 2$, & $z \propto 1$, l'on trouvera $y \propto 6$, & $x \propto 11$, & les deux Puiſſances propoſées, $mx-yz$, $my-xz$, ſe changeront en ces deux quarrez, 16, 1, dont les côtez ſont 4, 1. Mais ſi l'on ſuppoſe $a \propto 4$, on trouvera $x \propto 27$, & $y \propto 18$, & au lieu des deux Puiſſances propoſées $mx-yz$, $my-xz$, l'on aura ces deux quarrez, 36, 9, dont les côtez ſont 6, 3.

Solution plus générale.

Si vous voulez une ſolution plus générale, ſervez-vous de nôtre methode; & égalez la premiere Puiſſance $mx-yz$, au quarré aa, pour avoir $z \propto \frac{mx-aa}{y}$; & la ſeconde $my-xz$, au quarré bb, pour avoir le même $z \propto \frac{my-bb}{x}$. C'eſt pourquoi l'on aura cette Equation, $\frac{mx-aa}{y} \propto \frac{my-bb}{x}$; dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{bb}{m} + \sqrt{\frac{b^4}{4mm}+xx-\frac{aax}{m}}$, où l'on voit qu'il faut égaler au quarré cette Puiſſance, $\frac{b^4}{4mm}+xx-\frac{aax}{m}$, pour le côté duquel prenant $\frac{bb}{2m}+\frac{cx}{d}$, en ſorte qu'on ait $y \propto \frac{3bb}{2m}+\frac{cx}{d}$, l'on trouvera $x \propto \frac{aadd+bbcd}{ddm-ccm}$, & par conſéquent $y \propto \frac{bbdd+aacd}{adm-ccm}$, & $z \propto \frac{cm}{d}$: & alors les deux Puiſſances propoſées, $mx-yz$, $my-xz$, ſe changeront en ces deux quarrez, aa, bb, dont les côtez ſont a, b.

Parce que l'on a ſuppoſé $m \propto 2$, ſi l'on ſuppoſe $a \propto 2$, $b \propto 1$, $c \propto 1$, & $d \propto 2$, l'on trouvera $x \propto 3$, $y \propto 2$, & $z \propto 1$, & les deux Puiſſances propoſées, $mx-yz$, $my-xz$, ſe changeront en ces deux quarrez, 4, 1, dont les

côté

x ſont 2, 1. Mais ſi l'on ſuppoſe $a \propto 4$, on trouvera $x \propto 11$, $y \propto 6$, & $z \propto 1$, & au lieu des deux Puiſſances propoſées, $mx-yz$, $my-xz$, l'on aura ces deux quarrez, 16, 1, dont les côtez ſont 4, 1.

Cette Double Egalité ſe peut reſoudre plus facilement, en la reduiſant à une ſimple Egalité, en cette ſorte.

Parce que les deux quantitez x, y, ſont indéterminées, & qu'ainſi on les peut prendre telles qu'on voudra, on les pourra ſuppoſer égales entre elles, & alors en changeant par exemple, x, en y, à la place des deux Puiſſances propoſées $mx-yz$, $my-xz$, l'on aura cette ſeule, $my-yz$, à égaler au quarré; & ſi on l'égale au quarré aa, l'on trouvera $y \propto \frac{aa}{m-z}$, & auſſi $x \propto \frac{aa}{m-z}$, & châcune des deux Puiſſances propoſées $mx-yz$, $my-xz$, ſe changera en ce quarré aa, dont le côté eſt a.

Ou bien mettez la lettre m, à la place de châcune des deux quantitez indéterminées x, y, & alors au lieu des deux Puiſſances propoſées, $mx-yz$, $my-xz$, on aura cette ſeule, $mm-mz$, laquelle étant égalée au quarré $\frac{aamm}{bb}$, l'on trouvera $z \propto \frac{bbm-aam}{bb}$, & au lieu des deux Puiſſances propoſées, $mx-yz$, $my-xz$, l'on aura cette ſeule $\frac{aamm}{bb}$, qui a ſa Racine quarrée $\frac{am}{b}$.

Je finiray par cette autre Double Egalité

$$\begin{matrix} xz-yy. \\ yz-xx. \end{matrix}$$

où il y a quatre quantitez indéterminées, & où la difference des deux Puiſſances eſt $xz-yz+xx-yy$,

$4aabx$, ſe changeront en deux quarrez, dont les côtez ſont $\frac{16aab^3m^4+80a^3b^3mm \cdot 16aa^4bmm-80a^3b^3mm}{m^4-22abmm+25aabb}$.

Pour faire que la valeur trouvée de x, ſçavoir $\frac{aabbmm}{m^4-22abmm+25aabb}$, ſoit affirmée, il faut que ſon Dénominateur $m^4-22abmm+25aabb$ ſoit affirmé, c'eſt-à-dire, plus grand que zero. Ainſi l'on aura cette inégalité $m^4-22abmm+25aabb \oplus 0$, ou $m^4-22abmm \oplus -25aabb$, dans laquelle on trouvera $m \oplus \sqrt{8ab}+\sqrt{3ab}$, ou bien $m \ominus \sqrt{8ab}-\sqrt{3ab}$.

Si donc $a \gtrdot 1$, & $b \gtrdot 1$, on connoîtra que m doit être plus grande que $\sqrt{8}+\sqrt{3}$, ou bien moindre que $\sqrt{8}-\sqrt{3}$. C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $m \gtrdot 5$, ou bien $m \gtrdot 1$, on trouvera $c \gtrdot \frac{1}{2}$, $d \gtrdot 2$, & $x \gtrdot 4$, & les deux Puiſſances propoſées $2abxx+aabx$, $3abxx+4aabx$, ou $2xx+1x$, $3xx+4x$, ſe changeront en ces deux quarrez 36, 64, dont les côtez ſont 6, 8.

Methode de Diophante.

Pour reſoudre la même Double Egalité,

$$2abxx+aabx.$$
$$3abxx+4aabx.$$

par la methode de Diophante, multipliez la premiere Puiſſance $2abxx+aabx$, par le nombre quarré 4 de la ſeconde, & reciproquement la deuxiéme $3abxx+4aabx$ par le nombre quarré 1 de la premiere, & vous aurez cette autre Double Egalité,

$$8abxx+4aabx.$$
$$3abxx+4aabx.$$

où le dernier terme eſt le même dans chacune, ce qui eſt abſolument neceſſaire pour la pouvoir reſoudre par la methode de Diophante, laquelle nous repeterons encore ici.

Otez la plus petite Puiſſance $3abxx+4aabx$ de la plus grande $8abxx+4aabx$, pour avoir leur difference $5abxx$,

$5abxx$, dont les deux nombres produiſans ſont cx, $\frac{5abx}{c}$, la quantité c étant indeterminée. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{cx}{2} + \frac{5abx}{2c}$, dont le quarré $\frac{ccxx}{4} + \frac{5abxx}{2} + \frac{25aabbxx}{4cc}$, étant égalé à la plus grande Puiſſance $8abxx + 4aabx$, l'on trouvera $x \propto \frac{16aabcc}{c4 - 22abcc + 25aabb}$, comme auparavant, en ſubſtituant m à la place de c.

Ainſi vous voyez que la Double Egalité propoſée $2abxx + aabx$, $3abxx + 4aabx$, ſe reſoud comme ſi la lettre inconnuë n'y avoit qu'une dimenſion: auſſi elle ſe peut reduire à une autre de cette qualité, ſçavoir en ſuppoſant $x \propto \frac{ab}{y}$, car on aura en ſa place cette autre Double Egalité,

$$2a^3b^3 + a^3by.$$
$$3a^3b^3 + 4a^3by.$$

laquelle étant reſoluë par nôtre methode, ou par celle de Diophante, l'on trouvera $y \propto \frac{c4 - 22abcc + 25aabb}{16acc}$, & par conſéquent $x \propto \frac{16aabcc}{c4 - 22abcc + 25aabb}$, comme auparavant.

Autre Double Egalité avec deux termes.

Propoſons en ſecond lieu cette autre Double Egalité,

$$xx + ax.$$
$$xx - bx.$$

où la lettre inconnuë x ſe trouve encore par tout, & où le premier terme de chaque Puiſſance eſt un même quarré, ce qui neanmoins n'eſt pas abſolument neceſſaire, car il ſuffit que ces deux premiers termes ſoient chacun un nombre quarré, parce que quand ils ſont differens, on les peut rendre égaux par une Multiplication reciproque.

Si vous voulez resoudre cette Double Egalité par nôtre methode, égalez la premiere Puissance $xx+ax$ au quarré $\frac{ccxx}{dd}$, pour avoir $x \propto \frac{add}{cc-dd}$; & la deuxiéme $xx-bx$ au quarré $\frac{mmxx}{nn}$, pour avoir le même $x \propto \frac{bnn}{nn-mm}$, & par conséquent cette Equation, $\frac{add}{cc-dd} \propto \frac{bnn}{nn-mm}$, dans laquelle on trouvera $\frac{dn}{n} \propto \sqrt{\frac{add+bdd-bcc}{a}}$. Ainsi l'on aura cette Puissance à égaler au quarré, $\frac{add+bdd-bcc}{a}$: multipliez-la par le quarré aa du Dénominateur a, pour avoir en entiers cette autre Puissance à égaler au quarré, $aadd+abdd-abcc$. Pour cette fin supposez $d \propto y \ldots c$, & vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $aayy+abyy-2aacy-2abcy+aacc$, pour le côté duquel prenant $ac \ldots fy$, on trouvera $y \propto \frac{2aac+2abc-2acf}{aa+ab-ff}$, & par conséquent $d \propto \frac{aac+abc-2acf+cff}{aa+ab-ff}$, $\frac{md}{n} \propto \frac{aac+abc+cff-2acf-2bcf}{aa+ab-ff}$, ou $\frac{m}{n} \propto \frac{aa+ab+ff-2af-2bf}{aa+ab+ff-2af}$. C'est pourquoi si l'on suppose $m \propto aa+ab+ff-2af-2bf$, l'on aura $n \propto aa+ab+ff-2af$, &c.

Si $a \propto 2$, & $b \propto 1$, & que l'on suppose $c \propto 1$, & $f \propto 1$, l'on trouvera $y \propto \frac{1}{7}$, $d \propto \frac{3}{7}$, $m \propto 1$, $n \propto 3$, & $x \propto \frac{9}{8}$, & la Double Egalité proposée, $xx+ax$, $xx-bx$, ou $xx+2x$, $xx-1x$, se changera en ces deux quarrez, $\frac{2 \cdot 5 \cdot 9}{64}$, dont les côtez sont $\frac{15}{8}$, $\frac{3}{8}$.

La solution ne sera pas si générale en se servant de la methode de Diophante, car on trouvera $x \propto \frac{aa+2ab+bb}{8a-8b}$ où il n'y a aucune lettre indéterminée, ce qui ne donne qu'une solution, & alors les deux Puissances proposées $xx+ax$, $xx-bx$, se changeront en ces deux quarrez, $9a^4+$

$$\frac{9a^4+12a^3b-2aabb-4ab^3+b^4.}{64aa-128ab+64bb}$$
$$\frac{a^4-4a^3b-2aabb+12ab^3+9b^4.}{64aa-128ab+64bb}$$

dont les côtez ſont $\frac{3aa+2ab-bb.\ aa-2ab-3bb.}{8a-8b}$.

Parce que nous avons ſuppoſé $a \gtrdot 2$, & $b \gtrdot 1$, on trouvera $x \gtrdot \frac{8}{11}$, comme auparavant.

Cette Double Egalité peut comme la premiere, être reduite en une autre, où la lettre inconnuë n'ait qu'une dimenſion, ſçavoir en ſuppoſant $x \gtrdot \frac{ab}{y}$, car alors on aura en entiers cette autre Double Egalité,

$$aabb+aaby.$$
$$aabb-abby.$$

laquelle étant reſoluë par la methode de Diophante, donnera $y \gtrdot \frac{8aab-8abb}{aa+2ab+bb}$, & par conſéquent $x \gtrdot \frac{a^3+2ab}{8a-8b} + \frac{bb}{}$, comme auparavant.

Double Egalité avec tous ſes termes.

Propoſons maintenant cette Double Egalité,

$$xx+2ax+bc.$$
$$xx+2bx-bc.$$

où la lettre inconnuë x ne ſe rencontre pas dans tous les termes, & où le premier terme de chaque Puiſſance eſt un nombre quarré, ce qui n'eſt pas auſſi abſolument neceſſaire, parce qu'il ſuffit que les deux premiers termes, ou bien les deux derniers ſoient dans la raiſon de deux quarrez, que l'on peut quand on voudra, rendre égaux par une Multiplication reciproque.

Pour reſoudre premierement cette Double Egalité par la methode des ſimples Egalitez, égalez la premiere Puiſſance $xx+2ax+bc$, au quarré $xx-2dx+dd$, pour avoir $x \gtrdot \frac{dd-bc}{2a+2d}$; & la deuxiéme $xx+2bx-bc$ au quarré

ré $xx-2mx+mm$, pour avoir le même $x \propto \frac{mm+bc}{2b+2m}$, & par conſéquent cette Equation, $\frac{dd-bc}{2a+2d} \propto \frac{mm+bc}{2b+2m}$, où l'on trouve $m \propto \frac{\sqrt{d^4+4bd^3+4abda-6bcdd-4abbc-4aabc}}{2a+2d}$ $\frac{-4bbcd-8abcd+bbcc-aa-bc}{2a+2d}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $d^4+4bd^3+4abdd-6bcdd-4abbc-4aabc-4bbcd-8abcd+bbcc$, pour le côté duquel prenant $dd+2bd+2ab-3bc-2bb$, l'on trouvera $d \propto \frac{2abb+2abc-aab-aac+2bcc-2bbc-b^3}{2ab+2ac-2bb-2bc}$, &c.

Si $a \propto 2$, $b \propto 1$, & $c \propto 1$, l'on trouvera $d \propto -\frac{1}{2}$, & par conſéquent $m \propto -\frac{1}{2}$, & $x \propto \frac{1}{4}$, & la Double Egalité propoſée $xx+2ax+bc$, $xx+2bx-bc$, ou $xx+4x+1$, $xx+2x-1$, ſe changera en ces deux quarrez $\frac{81}{16}$, $\frac{49}{16}$, dont les côtez ſont $\frac{9}{4}$. $\frac{7}{4}$.

Pour reſoudre la même Double Egalité par la methode de Diophante, prenez par exemple la premiere Puiſſance $xx+2ax+bc$ pour la plus grande, & en ôtez la ſeconde $xx+2bx-bc$, pour avoir leur difference $2ax-2bx+2bc$, dont les deux nombres produiſans ſont $a-b$, $2x+\frac{2bc}{a-b}$, le premier $a-b$, étant égal à la moitié de la quantité connuë qui multiplie l'inconnuë dans la difference des deux Puiſſances. La moitié de la ſomme de ces deux nombres produiſans eſt $x+\frac{bc}{a-b}+\frac{a-b}{2}$, dont le quarré $xx+\frac{bbcc}{aa-2ab+bb}+\frac{2bx}{a-b}+ax-bx+bc+\frac{aa-2ab+bb}{4}$ étant égalé à la plus grande Puiſſance $xx+2ax+bc$, l'on trouvera $x \propto \frac{a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4+4bbcc}{4a^3-4aab-4abb-8abc+8bbc+4b^3}$, &c.

Parce

Parce que nous avons ſuppoſé $a \propto 2$, $b \propto 1$, & $c \propto 1$, l'on trouvera $x \propto \frac{1}{4}$, comme auparavant.

Si les premiers termes de la Double Egalité propoſée ne ſont pas deux quarrez égaux, mais ſeulement les derniers, on la pourra reduire en une autre de cette qualité, ſçavoir en diviſant la Racine quarrée du dernier terme commun par une grandeur indéterminée, & en mettant par tout ce quotient à la place de la lettre inconnuë qui ſe trouve dans la Double Egalité.

Ainſi pour reſoudre par la methode de Diophante, cette Double Egalité,

$$2acxx - 2abcx + aabb.$$
$$-2acxx + 2abcx + aabb.$$

où le dernier terme eſt un même quarré, dont le côté eſt ab, ſuppoſez $x \propto \frac{ab}{y}$, & vous aurez en entiers & en moindres termes, cette autre Double Egalité,

$$yy - 2cy + 2ac.$$
$$yy + 2cy - 2ac.$$

dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{aa+cc}{2a}$, & par conſéquent $x \propto \frac{2aab}{aa+cc}$, & la Double Egalité propoſée ſe changera en ces deux quarrez,

$$\frac{a^6bb + 4a^5bbc + 2a^4bbcc - 4a^3bbc^3 + aabbc^4}{a^4 + 2aacc + c^4}$$
$$\frac{a^6bb - 4a^5bbc + 2a^4bbcc + 4a^3bbc^3 + aabbc^4}{a^4 + 2aacc + c^4}$$

dont les côtez ſont $\frac{a^3b + 2aabc - abcc \;.\; a^3b - 2aabc - abcc}{aa + cc}$.

Si $a \propto 2$, $b \propto 1$, & $c \propto 1$, l'on trouvera $y \propto \frac{5}{4}$, & $x \propto \frac{2}{5}$, & les deux Puiſſances propoſées $2acxx - 2abcx + aabb$, $-2acxx + 2abcx + aabb$, ou $4xx - 4x + 4$, $-4xx + 4x + 4$, ſe changeront en ces deux quarrez $\frac{196 \cdot 4}{25}$, dont les côtez ſont $\frac{14 \cdot 2}{5}$.

La

La methode de Diophante auroit donné la même valeur pour x, ſans reduire la Double Egalité propoſée, que l'on peut auſſi reſondre très-facilement par la methode des ſimples Egalitez, comme vous allez voir.

Egalez la premiere Puiſſance $2acxx-2abcx+aabb$, au quarré $ddxx+2abdx+aabb$, pour avoir $x \propto \frac{2abc-2abd}{2ac-dd}$; & la deuxiéme $-2abcxx+2abcx+aabb$, au quarré $mmxx-2abmx+aabb$, pour avoir le même $x \propto \frac{2abc+2abm}{2ac+mm}$, & par conſéquent cette Equation, $\frac{2a^2c+2abd}{2ac-dd} \propto \frac{2abc+2abm}{2ac+mm}$, dans laquelle on trouvera $m \propto \frac{\sqrt{d^4-4cd^3-4ccdd-12acdd-8accd+4aacc+2ac-dd}}{2c+2d}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $d^4-4cd^3-4ccdd-12acdd-8accd+4aacc$, pour le côté duquel prenant $2ac+2cd \ldots dd$, en ſorte qu'on ait $m \propto -\frac{cd}{c+d}$, ou $m \propto \frac{2ac+cd-dd}{c+d}$, l'on trouvera $d \propto \frac{-2ac}{a+c}$, & par conſéquent $m \propto \frac{2ac}{c-a}$, ou $m \propto \frac{-2aa}{c+a}$, & $x \propto \frac{ccb-aab}{aa+cc}$, & la Double Egalité propoſée ſe changera en ces deux quarrez,

$$\frac{a^6bb+4a^5bbc+2a^4bbcc-4a^3bc^3+aabbc^4}{a^4+2aacc+c^4}.$$

$$\frac{a^6bb-4a^5bbc+2a^4bbcc+4a^3bc^3+aabbc^4}{a^4+2aacc+c^4},$$

comme auparavant.

Pour reſoudre cette Double Egalité,

$$aa+4ax-xx.$$
$$aa-2ax-xx.$$

en ſe ſervant de la methode de Diophante, ôtez la plus petite $aa-2ax-xx$ de la plus grande $aa+4ax-xx$, pour

pour avoir leur difference $6ax$, dont les deux nombres produisans sont $2a$, $3x$. La moitié de leur somme est $a+\frac{3x}{2}$, dont le quarré $aa+3ax+\frac{9xx}{4}$, étant égalé à la plus grande Puissance $aa+4ax-xx$, on trouvera $x \propto \frac{4a}{13}$, & la Double Egalité proposée se changera en ces deux quarrez $\frac{361aa.}{169}$ $\frac{196a}{}$, dont les côtez sont $\frac{19a}{13}$, $\frac{7a}{}$,

Pour resoudre par la methode de Diophante cette Double Egalité,

$$xx+ax+cc.$$
$$bx+cc.$$

ôtez la seconde Puissance $bx+cc$ de la premiere $xx+ax+cc$, pour avoir leur difference $xx+ax-bx$, dont le dernier terme $ax-bx$ étant divisé par la moitié $\frac{1}{2}c$ du côté du quarré commun cc, on aura $\frac{ax-bx}{2c}$, pour l'un des deux nombres produisans, par lequel divisant la même difference $xx+ax-bx$, on aura $\frac{2cx}{a-b}+2c$ pour l'autre nombre produisant, après quoi le reste sera facile.

Double Egalité avec plusieurs grandeurs inconnuës.

Pour resoudre cette Double Egalité,

$$zx-yy.$$
$$zy-xx.$$

où il y a plusieurs quantitez inconnuës: prenant la premiere Puissance $zx-yy$ pour la plus grande, ôtez en la deuxiéme $zy-xx$, pour avoir leur difference $zx-zy+xx-yy$, dont les deux nombres produisans sont $x-y$, $x+y+z$: mais comme ils ne se rencontrent pas propres à resoudre cette Double Egalité, multipliez le premier $x-y$ par le nombre indéterminé $\frac{a}{b}$, & divisez le second $x+y+z$ par le même nombre indéterminé $\frac{a}{b}$, & vous aurez ces deux autres nombres produi-

produiſans $\frac{ax-ay}{b}$, $\frac{bx+by+bz}{a}$. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{aax+bbx-aay+bby+bbz}{2ab}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puiſſance $zx-yy$, on trouvera $z \mathfrak{D} -x-y+\frac{aax+aay}{bb}+2abb\sqrt{aaxy-bbxy-bbxx-bbyy}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $aaxy-bbxy-bbxx-bbyy$; & comme il n'y a aucun terme qui ſoit quarré, pour faire que cela arrive, il faut au moins que la ſomme $aa-3bb$ des unitez ſoit un nombre quarré. Ainſi nous avons cette Puiſſance à égaler au quarré, $aa-3bb$, pour le côté duquel prenant $a \ldots \frac{cb}{d}$, l'on trouvera en entiers $a \mathfrak{D} cc+3dd$, & $b \mathfrak{D} 2cd$, & au lieu de la Puiſſance précedente $aaxy-bbxy-bbxx-bbyy$, on aura celle-ci, $c^4xy+2ccddxy+9d^4xy-4ccddxx-4ccddyy$, où la ſomme des unitez fait ce nombre quarré $c^4-6ccdd+9d^4$, dont le côté eſt $cc \ldots 3dd$. C'eſt pourquoi l'on ſuppoſera $y \mathfrak{D} \omega+x$, pour avoir cette derniere Puiſſance à égaler au quarré, $c^4xx-6ccddxx+9d^4xx+c^4x\omega \ldots 6ccddx\omega+9d^4x\omega-4ccdd\omega\omega$, pour le côté duquel prenant $ccx \ldots 3ddx \ldots mn\omega$, on trouvera en entiers $\omega \mathfrak{D} c^4-6ccdd-9d^4-6mndd+2mncc$, & $x \mathfrak{D} mmnn+4ccdd$, & par conſéquent $y \mathfrak{D} c^4-2ccdd+9d^4-6mndd+2mncc+mmnn$, &c.

Si l'on ſuppoſe $m \mathfrak{D} 1$, $n \mathfrak{D} 1$, $c \mathfrak{D} \sqrt{\frac{1}{2}}$, & $d \mathfrak{D} \sqrt{\frac{1}{2}}$, l'on trouvera $b \mathfrak{D} 1$, $a \mathfrak{D} 2$, $\omega \mathfrak{D} 3$, $x \mathfrak{D} 2$, $y \mathfrak{D} 5$, & $z \mathfrak{D} 25$, & la Double Egalité propoſée $zx-yy$, $zy-xx$, ſe changera en ces deux quarrez 25, 121, dont les côtez ſont 5, 11.

Mais ſi l'on ſuppoſe $m \mathfrak{D} 1$, $n \mathfrak{D} 2$, $c \mathfrak{D} 2$, & $d \mathfrak{D} 1$, l'on trouvera $a \mathfrak{D} 7$, $b \mathfrak{D} 4$, $\omega \mathfrak{D} 1$, $x \mathfrak{D} 4$, $y \mathfrak{D} 5$, & $z \mathfrak{D} \frac{325}{16}$, & les deux Puiſſances propoſées $zx-yy$, $zy-xx$, ſe changeront en ces deux quarrez $\frac{2169}{16}$, $\frac{21}{4}$, dont les côtez ſont $\frac{17}{4}$, $\frac{25}{5}$.

Si

Si vous voulez vous ſervir de nôtre methode égalez la premiere Puiſſance $zx-yy$ au quarré indéterminé aa, pour avoir $z \propto \frac{aa+yy}{x}$: & la deuxiéme $zy-xx$ au quarré indéterminé bb, pour avoir le même $z \propto \frac{bb+xx}{y}$, & par conſéquent cette Equation, $\frac{aa+yy}{x} \propto \frac{bb+xx}{y}$, ou $aay+y^3 \propto bbx+x^3$, que vous reduirez en ces deux,

$$aay \propto x^3.$$
$$y^3 \propto bbx.$$

Dans la premiere $aay \propto x^3$, on trouvera $y \propto \frac{x^3}{aa}$, & par conſéquent $y^3 \propto \frac{x^9}{a^6}$, & au lieu de la ſeconde $y^3 \propto bbx$, on aura celle-ci, $\frac{x^9}{a^6} \propto bbx$, dans laquelle on trouvera $b \propto \frac{x^4}{a^3}$: c'eſt pourquoi au lieu de $z \propto \frac{bb+xx}{y}$, ou de $z \propto \frac{aa+yy}{x}$, on aura $z \propto \frac{a^6+x^6}{a^4x}$, & les deux Puiſſances propoſées $zx-yy$, $zy-xx$, ſe changeront en ces deux quarrez, aa, $\frac{x^8}{a^6}$, dont les côtez ſont a, $\frac{x^4}{a^3}$.

Si l'on ſuppoſe $a \propto 1$, & $x \propto 2$, on trouvera $b \propto 16$, $y \propto 8$, & $z \propto \frac{65}{2}$, & la Double Egalité propoſée $zx-yy$, $zy-xx$, ſe changera en ces deux quarrez 1, 256, dont les côtez ſont 1, 16.

Ou bien dans la ſeconde Equation, $bbx \propto y^3$, on trouvera $x \propto \frac{y^3}{bb}$, & la premiere $aay \propto x^3$, ſe changera en celle-ci, $aay \propto \frac{y^9}{b^6}$, dans laquelle on trouvera $a \propto \frac{y^4}{b^3}$, & par conſéquent $z \propto \frac{b^6+y^6}{b^4y}$, & la Double Egalité propoſée $zx-yy$, $zy-xx$, ſe changera en ces deux quarrez $\frac{y^8}{b^6}$, bb, dont les côtez ſont $\frac{y^4}{b^3}$, b.

Si

Si l'on ſuppoſe $b \propto 2$, & $y \propto 3$, on trouvera $a \propto \frac{81}{8}$, $x \propto \frac{27}{4}$, & $z \propto \frac{793}{48}$, & la Double Egalité propoſée $zx-yy$, $zy-xx$, ſe changera en ces deux quarrez, $\frac{6561}{64}$, 4, dont les côtez ſont $\frac{81}{8}$, 2.

Si vous voulez reſoudre autrement la Double Egalité propoſée $zx-yy$, $zy-xx$, multipliez enſemble les deux Puiſſances $zx-yy$, $zy-xx$, pour avoir leur produit $xxyy-x^3z-y^3z+xyzz$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant xy, l'on trouvera $z \propto \frac{x^3+y^3}{xy}$, & les deux Puiſſances propoſées $zx-yy$, $zy-xx$, ſe changeront en ces deux autres,

$$\frac{x^3}{y}$$

$$\frac{y^3}{x}$$

dont la premiere $\frac{x^3}{y}$ étant égalée au quarré $\frac{aaxx}{bb}$, on trouvera en entiers $x \propto aa$, & $y \propto bb$, & par conſéquent $z \propto \frac{a^6+b^6}{aabb}$, & les deux Puiſſances propoſées $zx-yy$, $zy-xx$, ſe changeront en ces deux quarrez, $\frac{a^6}{bb}$, $\frac{b^6}{aa}$, dont les côtez ſont $\frac{a^3}{b}$, $\frac{b^3}{a}$.

Si l'on ſuppoſe $a \propto 2$, & $b \propto 1$, on trouvera $x \propto 4$, $y \propto 9$, & $z \propto \frac{793}{36}$, & les deux Puiſſances propoſées $zx-yy$, $zy-xx$, ſe changeront en ces deux quarrez, $\frac{729}{4}$, $\frac{64}{9}$, dont les côtez ſont $\frac{27}{2}$, $\frac{8}{3}$.

Pour avoir une ſolution plus générale, au lieu de prendre xy pour le côté du quarré qu'il faut égaler au produit $xxyy-x^3z-y^3z+xyzz$, on prendra $xy \ldots az$, & alors on trouvera $z \propto \frac{2axy-x^3-y^3}{aa-xy}$, & les deux Puiſſances propoſées $zx-yy$, $zy-xx$, ſe changeront en ces deux autres,

$2axxy-$

$$\frac{2axxy-x^4-aayy,\ 2axyy-y^4-aaxx}{aa-xy}$$

Si vous diviſez la premiere par le quarré $x^4-2axxy+aayy$, dont le côté eſt $xx...ay$, ou la deuxiéme par le quarré $y^4-2axyy+aaxx$, dont le côté eſt $yy...ax$, on aura en leur place cette ſeule Puiſſance à égaler au quarré, $\frac{1}{xy-aa}$, pour le côté duquel prenant $\frac{1}{b}$, l'on trouvera $y \propto \frac{aa+bb}{x}$, & par conſéquent $z \propto \frac{a^6+2a^4bb+3aabb+b^6-2ax^3-2abbx^3+x^6}{b\ x^3}$, & les deux Puiſſances propoſées $zx-yy$, $zy-xx$, ſe changeront en ces deux quarrez,

$$\frac{a^6+2a^4bb+aabb-2a^3x^3-2abbx^3+x^6}{bbxx}$$

$$\frac{a^8+4a^6bb+6aabb+4aabb+bb-2ax^3-4a^3bbx^3-2abbx^3+aax^6}{xx}$$

dont les côtez ſont $\frac{a^3+abb..x^3}{ox}$, $a^4+2aabb+bb-ax^3$.

Si l'on ſuppoſe $a \propto 2$, $b \propto 1$, & $x \propto 1$, on trouvera $y \propto 5$, & $z \propto 106$, & la Double Egalité propoſée $zx-yy$, $zy-xx$, ſe changera en ces deux quarrez, 81, 529, dont les côtez ſont 9, 23.

On peut reſoudre la Double Egalité propoſée en pluſieurs autres manieres, que vous trouverez dans nôtre Diophante, lorſqu'il aura le bonheur de paroître, ſçavoir en la Queſtion que nous ajoûterons à 22. 2. & que nous avons déja reſoluë en pluſieurs façons à la fin de nôtre *Traité de l'Inſtrument univerſel.* C'eſt pourquoi pour abreger nous finirons ce Traité, après avoir ajoûté quelques Queſtions, qui dépendent des regles précedentes.

QUES-

*QUESTION I.

Trouver deux nombres, tels que ſi de chacun, de leur ſomme & de leur difference, on ôte le produit des deux mêmes nombres il reſte deux nombres quarrez.

COmme ces deux nombres doivent être des Fractions inégales, on les pourra très-commodément repréſenter ainſi, $\frac{x+y}{z}, \frac{x-y}{z}$. Si de chacun on ôte leur produit $\frac{xx-yy}{zz}$, l'on aura en entiers cette Double Egalité,

$$xz+yz-xx+yy.$$
$$xz-yz-xx+yy.$$

& ſi l'on ôte le même produit $\frac{xx-yy}{zz}$ de leur ſomme $\frac{2x}{z}$, & de leur difference $\frac{2y}{z}$, l'on aura en entiers cette autre Double Egalité,

$$2xz-xx+yy.$$
$$2yz-xx+yy.$$

La difference des deux premieres Puiſſances eſt $2yz$, dont les deux nombres produiſans ſont $z, 2y$; la moitié de leur ſomme eſt $\frac{1}{2}z+y$, dont le quarré $\frac{1}{4}zz+yz+yy$ étant égalé à la plus grande Puiſſance $xz+yz-xx-yy$, on trouvera $x \mathrel{)\!(} 1$, & $z \mathrel{)\!(} 2$, & la ſeconde Double Egalité ſe changera en celle-ci,

$$yy+3.$$
$$yy+4y-1.$$

La difference de ces deux Puiſſances eſt $4-4y$, dont les deux nombres produiſans ſont 2, $2-2y$. La moitié de leur difference eſt y, dont le quarré yy étant égalé à la plus petite Puiſſance $yy+4y-1$, l'on trouvera

* *Cette Queſtion manque à Lil. 3. Dioph.*

trouvera $y \propto \frac{1}{4}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{5}{8}$, qui ſatisfont aux conditions de la Queſtion, car ſi de chacun, de leur ſomme, & de leur difference on ôte leur produit $\frac{15}{64}$, il reſte ces quatre nombres quarrez $\frac{25.9.49.1}{64}$, dont les côtez ſont $\frac{5.3.7.1}{8}$.

Si vous voulez trouver deux autres nombres ſervez-vous de la valeur trouvée de $y \propto \frac{1}{4}$, & ſuppoſez $y \propto \omega + \frac{1}{4}$, & la ſeconde Double Egalité ſe changera en celle-ci,

$$\omega\omega + \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{49}{16}.$$
$$\omega\omega + \tfrac{9}{2}\omega + \tfrac{1}{16}.$$

où les deux derniers termes $\frac{49}{16}$, $\frac{1}{16}$, ſont des quarrez differens, que l'on rendra égaux, en multipliant la premiere Puiſſance par le nombre quarré 1, & la deuxiéme par le nombre quarré 49, pour avoir ces deux autres Puiſſances à égaler au quarré,

$$\omega\omega + \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{49}{16}.$$
$$49\omega\omega + \tfrac{441}{2}\omega + \tfrac{49}{16}.$$

Leur difference eſt $48\omega\omega + 220\omega$, dont les deux nombres produiſans ſont $\frac{440}{9}\omega$, $\frac{41}{55}\omega + \frac{7}{8}$. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{12147}{3960}\omega + \frac{7}{4}$, dont le quarré $\frac{147499009}{14817225}\omega\omega + \frac{12147}{220}\omega + \frac{49}{16}$ étant égalé à la plus grande Puiſſance $49\omega\omega + \frac{441}{2}\omega + \frac{49}{16}$, on trouvera $\omega \propto \frac{4045195}{3568144}$, & par conſéquent $y \propto \frac{12965569}{3568144}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur, $\frac{486.7065.2771.5927}{71362992}$.

QUESTION II.

Trouver deux nombres, tels que ſi de chacun, de leur ſomme, & de leur difference on ôte la difference de leurs quarrez, il reſte quatre nombres quarrez.

SI l'on met $\frac{x+y}{2z}$, $\frac{x-y}{2z}$, pour les deux nombres qu'on cherche, leur ſomme ſera $\frac{x}{z}$, leur difference ſera $\frac{y}{z}$, & la difference de leurs quarrez ſera $\frac{xy}{zz}$, laquelle étant ôtée de la ſomme $\frac{x}{z}$, & de la difference $\frac{y}{z}$, donnera en entiers cette Double Egalité,

$$xz-xy.$$
$$yz-xy.$$

& étant ôtée de chacun des deux nombres, donnera en entiers cette autre Double Egalité,

$$2xz+2yz-4xy.$$
$$2xz-2yz-4xy.$$

La difference des deux premieres Puiſſances eſt $xz-yz$, dont les deux nombres produiſans ſont z, $x-y$. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{x-y+z}{2}$, dont le quarré $\frac{xx-2xy+yy+2xz-2yz+zz}{4}$ étant égalé à la plus grande Puiſſance $xz-xy$, on trouvera $z \gg x+y$, & la ſeconde Double Egalité ſe changera en celle-ci,

$$2xx+2yy$$
$$2xx-2yy-4xy.$$

La difference de ces deux Puiſſances eſt $4yy+4xy$, dont les deux nombres produiſans ſont $\frac{2y}{b}$, $\frac{2bx+2by}{a}$. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{ay}{b}+\frac{by}{a}+\frac{bx}{a}$, dont le quarré

$\frac{aayy}{bb}$

$\frac{aayy}{bb}+yy+\frac{2byy}{aa}+2xy+\frac{2bbxy}{aa}+bbxx$ étant égalé à la plus grande Puiſſance $2xx+2yy$, on trouvera $y \mathrel{)\!\!(} \frac{aabb-4x+abx\sqrt{4^4+2a^4}}{a^4+64}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $2a^4+4b^4$, pour le côté duquel prenant $2bb+aa$, l'on trouvera $a \mathrel{)\!\!(} 2$, & $b \mathrel{)\!\!(} 1$, & par conſéquent $x \mathrel{)\!\!(} 17$, $y \mathrel{)\!\!(} 7$, & $z \mathrel{)\!\!(} 24$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{17}{24}$, qui ſont eſſentiellement les côtez d'un triangle rectangle, & qui ſatisfont aux conditions de la Queſtion: car ſi de chacun, de leur ſomme $\frac{17}{24}$, & de leur difference $\frac{7}{24}$, on ôte la difference $\frac{119}{576}$ de leurs quarrez $\frac{144.25}{576}$, il reſtera ces quatre nombres quarrez $\frac{169\ 1,289,49}{576}$, dont les côtez ſont $\frac{13,\ 1,\ 17,\ 7}{576}$.

Ou bien parce que dans la premiere Puiſſance $2xx+2yy$, la ſomme 4 des unitez eſt un nombre quarré, l'on ſuppoſera $x \mathrel{)\!\!(} \omega+y$, & au lieu de la Puiſſance $2xx+2yy$, on aura celle-ci à égaler au quarré, $4yy+4\omega y+2\omega\omega$, pour le côté duquel prenant $2y \mathrel{..} \frac{ay}{b}$, on trouvera en entiers $y \mathrel{)\!\!(} aa-2bb$, & $\omega \mathrel{)\!\!(} 2ab+4bb$, & par conſéquent $x \mathrel{)\!\!(} aa+4ab+2bb$, & au lieu de la derniere Puiſſance $2xx-2yy-4xy$, on aura celle-ci à égaler au quarré, $16b^4+64ab^3+48aabb-4a^4$, pour le côté duquel prenant $4bb+8ab \mathrel{..} 2aa$, on trouvera $a \mathrel{)\!\!(} 4$, & $b \mathrel{)\!\!(} 1$, & par conſéquent $y \mathrel{)\!\!(} 14$, $x \mathrel{)\!\!(} 34$, & $z \mathrel{)\!\!(} 48$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{17}{24}$, comme auparavant.

Si vous voulez deux autres nombres, ſuppoſez $a \mathrel{)\!\!(} u+4b$, à cauſe de $a \mathrel{)\!\!(} 4b$, & au lieu de la Puiſſance $16b^4+64ab^3+48aabb-4a^4$, on aura celle-ci à égaler au quarré, $16b^4-576b^3u-336bbuu-64bu^3-4u^4$,

pour le côté duquel prenant $4bb - 72bu - 690uu$, on trouvera $b \gtrless 476104$, & $u \gtrless -99424$, & par conſéquent $a \gtrless 1804992$, $\omega \gtrless 2625427897600$, $y \gtrless 2804646082432$, $x \gtrless 7148801802368$, & $z \gtrless 9953447884800$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur, $\frac{1}{2}$, $\frac{16969358281}{7776233216.0}$.

* QUESTION III.

Trouver deux nombres, tels que ſi de chacun, de leur ſomme, & de leur difference, on ôte un même nombre donné, il reſte quatre nombres quarrez.

SI l'on met a pour le nombre donné, & z, ω, pour les deux nombres qu'on cherche, on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces deux Doubles Egalitez, c'eſt à dire ces quatre Puiſſances à égaler au quarré,

$$lz - la.$$
$$lz + l\omega \quad la.$$
$$lz - l\omega - la.$$
$$l\omega - la.$$

où la lettre l repréſente l'unité, afin d'obſerver la loi des homogenes.

Egalez la premiere Puiſſance $lz - la$, au quarré dd, pour avoir $lz \gtrless dd + la$, & la deuxiéme $lz + l\omega - la$ au quarré mm, pour avoir le même $lz \gtrless mm + la - l\omega$, & par conſéquent cette Equation, $dd + la \gtrless mm + la - l\omega$, dans laquelle on trouvera $l\omega \gtrless mm - dd$, & à cauſe de $lz \gtrless dd + la$, les deux dernieres Puiſſances ſe changeront en ces deux autres,

$$2dd - mm.$$
$$mm - dd - la.$$

Egalez la premiere $2dd - mm$ au quarré nn, pour avoir $mm + nn \gtrless 2dd$. Suppoſez $m \gtrless x + y$, & $n \gtrless x - y$, &

* *Cette Queſtion manque à* 14. 4. *Dioph.*

& au lieu de l'Equation précedente $mm+nn \propto 2dd$, vous aurez celle-ci, $2xx+2yy \propto 2dd$, & par conſéquent $dd \propto xx+yy$. Si donc à la place de dd on met ſa valeur trouvée $xx+yy$, au lieu de $lz \propto dd+la$, on aura $lz \propto xx+yy+la$, & au lieu de $lw \propto mm-dd$, on aura $lw \propto 2xy$: & enfin au lieu de la derniere Puiſſance $lw-la$, on aura celle-ci, $2xy-la$. Mais à cauſe de $dd \propto xx+yy$, il faut encore égaler au quarré cette Puiſſance $xx+yy$. Ainſi on aura cette Double Egalité,

$$\begin{matrix} 2xy-la. \\ xx+yy. \end{matrix}$$

Egalez la premiere Puiſſance $2xy-la$, au quarré bb, pour avoir $x \propto \frac{bb+la}{2y}$, & par conſéquent $xx \propto \frac{b^4+2lab^2+llaa}{4yy}$, & au lieu de la ſeconde $xx+yy$, vous aurez en entiers celle-ci à égaler au quarré, $b^4+2labb+llaa+4y^4$, pour le côté duquel prenant $bb+2yy$, on trouvera $2by \propto \sqrt{llaa+2labb}$. Ainſi l'on aura encore cette Puiſſance à égaler au quarré, $llaa+2labb$, pour le côté duquel prenant $la+lb$, en ſorte qu'on ait $2by \propto la+lb$, & par conſéquent $y \propto \frac{la+lb}{2b}$, on trouvera $b \propto \frac{2la}{2a-l}$, & par conſéquent $y \propto \frac{2aa+ll}{4a-2l}$, $x \propto \frac{8a^3+2lla}{8a^3-4laa-2lla+l^3}$, $m \propto \frac{16a^4+32la^3-8llaa+8l^3a+l^4}{32a^3-16laa-8lla+4l^3}$, $n \propto \frac{16a^4-32la^3-8llaa-8l^3a+l^4}{32a^3-16laa-8lla+4l^3}$, & $d \propto \frac{16a^4+24llaa+l^4}{32a^3-16laa-8lla+4l^3}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels ;

$$\frac{256a^8+1024la^7-256lla^6-256l^3a^5+1120l^4a^4-64l^5a^3-16l^5aa+16l^7a+l^8}{1024a^6-1024la^5-256lla^4+512l^3a^3-64l^4aa-64l^5a+16l^6}$$

$$\frac{1024a^7-256lla^5-64l^4a^3+16l^6a}{1024a^6-1024la^5-256lla^4+512l^3a^3-64l^4aa-64l^5a+16l^6}$$

Si $a \gtrless 1$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{1845.720}{144}$, qui ſatisfont à la Queſtion, car ſi de chacun, de leur ſomme $\frac{2545}{144}$, & de leur difference $\frac{1105}{144}$, on ôte le nombre donné 1, il reſtera ces quatre nombres quarrez $\frac{1681,576,2401,961}{144}$, dont les côtez ſont $\frac{41,24,49,31}{12}$.

QUESTION IV.

Trouver deux nombres triangulaires, dont la ſomme & la difference ſoient chacun un nombre triangulaire.

SI l'on met $\frac{xx+lx}{2}$, $\frac{xx-lx}{2}$, pour les deux nombres triangulaires qu'on cherche, leur ſomme ſera xx qu'il faut égaler au triangle, & leur difference ſera lx, qu'il faut auſſi égaler au triangle. Pour cette fin on les multipliera par 8, & l'on ajoûtera 1 à chaque produit, pour avoir en leur place ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$8xx+ll.$$
$$8lx+ll.$$

Leur difference eſt $8xx-8lx$, dont les deux nombres produiſans ſont $4x$, $2x-2l$. La moitié de leur ſomme eſt $3x-l$, dont le quarré $9xx-6lx+ll$ étant égalé à la plus grande Puiſſance $8xx+ll$, on trouvera $x \gtrless 6$, & les deux nombres triangulaires qu'on cherche, ſeront 15, 21, dont les côtez ſont 5, 6, & dont la ſomme 36 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 8, & la difference 6 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 3.

Si vous voulez une ſolution plus générale, mettez $\frac{xx-lx}{2}$, $\frac{xx+2xy+yy-lx-ly}{2}$, pour les deux nombres trian-

triangulaires qu'on cherche. Leur ſomme ſera $xx+xy+\frac{yy}{2}-lx-\frac{ly}{2}$, qu'il faut égaler à un nombre triangulaire, & leur difference ſera $xy+\frac{yy-ly}{2}$, qu'il faut auſſi égaler au triangle. Pour cette fin on les multipliera par 8, & l'on ajoûtera 1 à chaque produit, pour avoir en leur place ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$8xx+8xy+4yy-8lx-4ly+ll$$
$$8xy+4yy-4ly+ll.$$

Leur difference eſt $8xx-8lx$, dont les deux nombres produiſans ſont $4x$, $2x-2l$. La moitié de leur difference eſt $x:l$, dont le quarré $xx+2lx+ll$ étant égalé à la plus petite Puiſſance $8xy+4yy-4ly+ll$, on trouvera $x \propto 4y-l+\sqrt{20yy-12ly+ll}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $20yy-12ly+ll$, pour le côté duquel prenant $l \ldots \frac{ay}{b}$, on trouvera $y \propto \frac{2ab-12bb}{aa-20bb}$, & par conſéquent $x \propto \frac{20ab-24aa-480bb}{aa-20bb}$.

Si l'on ſuppoſe $a \propto 9$, & $b \propto 2$, ou bien $a \propto 4$, & $b \propto 1$, l'on trouvera $y \propto -12$, & $x \propto 6$, ou bien $y \propto 1$, & $x \propto 6$, & les deux nombres triangulaires qu'on cherche, ſeront 15, 21, comme auparavant.

Mais ſi l'on ſuppoſe $a \propto 161$, & $b \propto 36$, on trouvera $y \propto -3960$, & $x \propto 1870$, & les deux nombres triangulaires qu'on cherche, ſeront 1747515, 2185095, dont les côtez ſont 1869, 2090, & dont la ſomme 3932610 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 2804, & la difference 437580 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 935.

On peut trouver une infinité d'autres nombres triangulaires, parce qu'on peut donner une infinité d'autres valeurs aux quantitez indéterminées a & b,

en ſorte que la valeur trouvée de y, ſçavoir $\frac{2ab-12bb}{aa-20bb}$, ſoit toûjours un nombre entier. Pour cette fin on égalera à l'unité le Dénominateur $aa-20bb$; par cette Equation, $aa-20bb \propto 1$, dans laquelle on trouvera $a \propto \sqrt{20bb+1}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $20bb+1$, pour le côté duquel prenant $1. + \frac{bc}{d}$, on trouvera $b \propto \frac{2cd}{cc-20dd}$.

C'eſt pourquoi ſi l'on ſuppoſe $c \propto 9$, & $d \propto 2$, on trouvera $b \propto 36$, & $a \propto 161$: & reciproquement ſi l'on ſuppoſe $c \propto 161$, & $d \propto 36$, on trouvera $a \propto 51841$, & $b \propto 11592$. Ainſi des autres.

On peut auſſi égaler à -4, le même Dénominateur $aa-20bb$, par cette Equation, $aa-20bb \propto -1$, dans laquelle on trouvera $a \propto \sqrt{20bb-4}$. Ainſi on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $20bb-4$, ce qui ſera facile, parce que la ſomme 16 des unitez eſt un nombre quarré. Suppoſez donc $b \propto z+1$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $20zz+40z+16$, pour le côté duquel prenant $4... \frac{cz}{d}$, l'on trouvera $z \propto \frac{8cd+40dd}{cc-20dd}$, & par conſéquent $b \propto \frac{cc+8cd+20dd}{cc-20dd}$, & $a \propto \frac{4cc+40cd+80dd}{cc-20dd}$.

Si l'on ſuppoſe $c \propto 9$, & $d \propto 1$, on trouvera $a \propto 1364$, & $b \propto 305$. Mais ſi l'on ſuppoſe $c \propto 4$, & $d \propto 1$, on trouvera $a \propto -76$, & $b \propto -17$, &c.

Mais on peut trouver bien plus facilement d'autres nombres triangulaires dans la Puiſſance $2cyy-12ly+ll$, où nous avons trouvé $y \propto l$: car il n'y a qu'à ſuppoſer $y \propto z+l$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $2czz+28lz+9ll$, pour le côté duquel prenant

nant $3l+\frac{cz}{d}$, on trouvera $z \propto \frac{28dd-6cd}{cc-20dd}$, & par conſéquent $y \propto \frac{cc-6cd+8dd}{cc-20dd}$, &c.

Si l'on ſuppoſe $c \propto 9$, & $d \propto 2$, on trouvera $z \propto 4$, $y \propto 5$, & $x \propto 40$, & les deux nombres triangulaires qu'on cherche, ſeront 780, 990, dont les côtez ſont 39, 44, & dont la ſomme 1770 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 59: & la difference 210 eſt un nombre triangulaire, dont le côté eſt 20.

QUESTION V.

Trouver quatre nombres, tels que ſi à chacun, à leur ſomme, au plan des deux premiers, à celui des deux moyens, & à celui des deux derniers, on ajoûte un même nombre donné, il vienne huit nombres quarrez.

SI l'on met, *la*, pour le nombre donné, & x, y, z, ω, pour les quatre nombres qu'on cherche, on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces quatre Doubles Egalitez, ou ces huit Puiſſances à égaler au quarré,

$lx+la.$
$ly+la.$
$lz+la.$
$l\omega+la.$
$lx+ly+lz+l\omega+la.$
$xy+la.$
$yz+la.$
$z\omega+la.$

Egalez la premiere $lx+la$ au quarré bb, la ſeconde $ly+la$ au quarré cc, la troiſiéme $lz+la$ au quarré dd, & la quatriéme $l\omega+la$ au quarré mm, pour avoir $lx \propto bb-la$, $ly \propto cc-la$, $lz \propto dd-la$, & $l\omega \propto mm-la$, & alors les quatre dernieres Puiſſances deviendront telles.

$bb+cc$

$bb+cc+dd+mm+l^3a.$
$bbcc-labb-lacc+llaa+l^3a.$
$ccdd-ladd-lacc+llaa+l^3a.$
$ddmm-ladd-lamm+llaa+l^3a.$

Egalez la ſeconde $bbcc-labb-lacc+llaa+l^3a$, au quarré $bbcc-2labc+llaa$, dont le côté eſt $bc...la$, pour avoir $b \mathfrak{D} c+l$: la troiſiéme $ccdd-ladd-lacc+llaa+l^3a$ au quarré $ccdd-2lacd+llaa$, dont le côté eſt $cd...la$, pour avoir $c \mathfrak{D} d+l$, & par conſéquent $b \mathfrak{D} d+2l$: & la quatriéme $ddmm-ladd-lamm+llaa+l^3a$ au quarré $ddmm-2ladm+llaa$, dont le côté eſt $dm...la$, pour avoir $d \mathfrak{D} m+l$, & par conſéquent $c \mathfrak{D} m+2l$, & $b \mathfrak{D} m+3l$, & la premiere Puiſſance $bb+cc+dd+mm+l^3a$, ſe changera en celle-ci, $4mm+12lm+14ll-3la$, laquelle étant égalée au quarré $4mm-4mn+nn$, dont le côté eſt $2m...n$, on trouvera $m \mathfrak{D} \frac{nn+3ln-11ll}{4n+12l}$, & par conſéquent $b \mathfrak{D} \frac{nn+12ln+3la+22ll}{4n+12l}$, $c \mathfrak{D} \frac{nn+8ln+3la+10ll}{4n+12l}$, & $d \mathfrak{D} \frac{nn+4ln+3la-2ll}{4n+12l}$, & ſi de leurs quarrez on ôte le nombre donné, la, on aura les quatre nombres qu'on cherche, de cette grandeur,

$n^4+24ln^3+188llnn-10lann-24llan+528l^3n-13l^3a+484l^4+9laa.$
$n^4+16ln^3+84llnn-10lann-48llan+160l^3n-84l^3a-100l^4+9llaa.$
$n^4+8ln^3+12llnn-10lann-72llan+16l^3n-156l^3a+4l^4+9llaa.$
$n^4-10lann-28llnn-96llan-228l^3a+196l^4+9llaa.$

chacun étant diviſé par $16nn+96ln+144ll$.

Si $a \mathfrak{D} 1$, & que l'on ſuppoſe $n \mathfrak{D} 9$, les quatre nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{10872.\ 6312.\ 2905.\ 649.}{576}$.

QUESTION

QUESTION VI.

Trouver en nombres un triangle rectangle, tel que le Plan des deux côtez étant ôté de chacun des deux mêmes côtez, & de l'hypotenuſe, il reſte trois nombres quarrez.

COmme ce triangle ne peut être exprimé qu'en Fractions, on le pourra très-commodément repréſenter ainſi, $\frac{x}{\omega}, \frac{y}{\omega}, \frac{z}{\omega}$, & en ſuppoſant que $\frac{z}{\omega}$ eſt l'hypotenuſe, on aura ſelon les conditions de la Queſtion ces deux Doubles Egalitez, ou ces quatre Puiſſances à égaler au quarré,

$$x\omega - xy.$$
$$y\omega - xy.$$
$$z\omega - xy.$$
$$xx + yy.$$

La difference des deux premieres eſt $x\omega - y\omega$, dont les deux nombres produiſans ſont ω, $x-y$. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{x-y+\omega}{2}$, dont le quarré $\frac{xx+yy+zz}{4} - \frac{xy+x\omega-y\omega}{2}$ étant égalé à la plus grande Puiſſance $x\omega - xy$, l'on trouvera $\omega \propto x+y$.

Pour égaler au quarré la quatriéme Puiſſance $xx+yy$, prenez $x \ldots \frac{ay}{b}$, pour le côté de ce quarré, en ſorte qu'on ait $z \propto x \ldots \frac{ay}{b}$, & alors vous trouverez en entiers $x \propto aa-bb$, & $y \propto 2ab$, & par conſéquent $z \propto aa+bb$, & $\omega \propto aa+2ab-bb$, & au lieu de la troiſiéme Puiſſance $z\omega - xy$, on aura celle-ci à égaler au quarré, $a^4 + 4ab^3 - b^4$, ce qui eſt facile, parce que la ſomme 4 des unitez eſt un nombre quarré. Suppoſez donc $a \propto b+c$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $c^4 + 4bc^3 +$

$c^4+4bc^3+6bbcc+8b^3c+4b^4$, pour le côté duquel prenant $cc+2bc...2bb$, l'on trouvera $c \propto 8$, & $b \propto -3$; & comme cette derniere valeur eſt niée, l'on ſuppoſera $b \propto d-3$, & l'on aura cette derniere Puiſſance à égaler au quarré, $4d^4+16d^3+24dd+1040d+4$, pour le côté duquel prenant $2+260d...2dd$, l'on trouvera $d \propto \frac{4233}{66}$, & par conſéquent $b \propto \frac{4035}{66}$, $a \propto \frac{4553}{66}$, & $x \propto \frac{45291884}{43556}$, & $y \propto \frac{36651650}{43556}$, $z \propto \frac{36930434}{43556}$, & $\omega \propto \frac{41180834}{43556}$, & le triangle rectangle qu'on cherche, ſera de cette grandeur,

2264592, 18325825, 18465217.

20590417

QUESTION VII.

Trouver trois nombres, dont le premier étant ajoûté à chacun des deux autres, à leur ſomme, & à leur difference, il vienne quatre nombres quarrez.

SI l'on met x, y, z, pour les trois nombres qu'on cherche, on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces quatre Puiſſances à égaler au quarré,

$lx+ly.$
$lx+lz.$
$lx+ly+lz.$
$lx+ly-lz.$

Egalez la premiere $lx+ly$, au quarré aa, & la deuxiéme $lx+lz$ au quarré bb, pour avoir $ly \propto aa-lx$, & $lz \propto bb-lx$, & alors les deux dernieres Puiſſances ſe changeront en ces deux autres,

$aa+bb-lx.$
$aa-bb+lx.$

Si on égale la premiere $aa+bb-lx$ au quarré cc, on trouvera $lx \propto aa+bb-cc$: & ſi on égale la derniere $aa-bb+lx$ au quarré dd, on trouvera le même $lx \propto dd+bb-aa$,

$bb-aa$; c'eſt pourquoi on aura cette Equation, $aa+bb-cc \mathrel{)\!(} dd+bb-aa$, dans laquelle on trouvera $2aa \mathrel{)\!(} cc+dd$. Il faut donc diviſer $2aa$ en deux quarrez, pour les deux quarrez cc, dd. Pour cette fin ſuppoſez $c \mathrel{)\!(} m\omega \ldots la$, & $d \mathrel{)\!(} n\omega \ldots la$, & au lieu de l'Equation précedente $2aa \mathrel{)\!(} cc+dd$, on aura celle-ci, $2llaa \mathrel{)\!(} mm\omega\omega+nn\omega\omega-2lam\omega-2lan\omega+2llaa$, dans laquelle on trouvera $\omega \mathrel{)\!(} 2m+2n$, & $la \mathrel{)\!(} mm+nn$, & par conſéquent $lc \mathrel{)\!(} mm+2mn \ldots nn$, & $ld \mathrel{)\!(} nn+2mn \ldots mm$, & les trois nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$llbb-4nm^3+4mn^3.$$

$$m^4+4nm^3+2mmnn-4mn^3-llbb+n^4.$$

$$4nm^3-4mn^3.$$

où l'on voit que le quarré $llbb$ doit être entre $4nm^3-4mn^3$, qui eſt l'aire quadruple d'un triangle rectangle, & $m^4+2mmnn+n^4+4nm^3-4mn^3$, qui eſt le quadruple de l'aire du même triangle, plus le quarré de ſon hypotenuſe.

Si l'on ſuppoſe $b \mathrel{)\!(} 12$, $m \mathrel{)\!(} 3$, & $n \mathrel{)\!(} 2$, les trois nombres qu'on cherche, ſeront 24, 145, 120, dont le premier 24 étant ajoûté au ſecond 145, au troiſiéme 120, à leur ſomme 265, & à leur difference 25, il vient ces quatre nombres quarrez 169, 144, 289, 49, dont les côtez ſont 13, 12, 17, 7.

Mais ſi l'on ſuppoſe $b \mathrel{)\!(} 11$, $m \mathrel{)\!(} 3$, & $n \mathrel{)\!(} 2$, les trois nombres qu'on cherche, ſeront 1, 168, 120, dont le premier 1 étant ajoûté au ſecond 168, au troiſiéme 120, à leur ſomme 288, & à leur difference 48, il vient ces quatre nombres quarrez 169, 121, 289, 49, dont les côtez ſont 13, 11, 17, 7.

Si au lieu du quarré indéterminé $llbb$, on met le quarré $4mmnn$, dont le côté $2mn$ eſt un côté du triangle rectangle, dont le troiſiéme nombre trouvé eſt le quadruple de l'aire, les trois nombres qu'on cherche ſeront de cette grandeur,

$4mmnn-$

$4mmnn-4nn^3+4mn^3.$
$m^4-2mmnn+n^4-4mn^3+4nm^3.$
$4nm^3-4mn^3.$

qui ſatisfont aux conditions de la Queſtion: car ſi on ajoûte le premier au ſecond, il vient ce nombre quarré $m^4-2mmnn+n^4$, dont le côté $mm...nn$, eſt l'un des deux côtez du triangle rectangle, dont le troiſiéme eſt le quadruple de l'aire, ſçavoir de ce triangle rectangle $2mn$, $mm...nn$, $mm+nn$. Si on l'ajoûte au troiſiéme, il vient ce nombre quarré $4mmnn$, dont le côté $2mn$ eſt l'autre côté du même triangle rectangle. Si on l'ajoûte à la difference des deux autres, il vient ce nombre quarré $m^4-4nm^3+2mmnn+4mn^3+n^4$, dont le côté $mn-2mn--nn$ eſt égal à la difference des deux côtez du même triangle rectangle. Enfin ſi on l'ajoûte à la ſomme des deux autres, il vient ce nombre quarré $m^4+4nm^3+2mmnn-4mn^3+n^4$, dont le côté $mm+2mn-nn$ eſt égal à la ſomme des deux côtez du même triangle rectangle.

Si l'on ſuppoſe $m \gtrdot 4$, & $n \gtrdot 3$, les trois nombres qu'on cherche, ſeront 240, 385, 336, dont le premier 240 étant ajoûté à chacun des deux autres 385, 336, à leur ſomme 721, & à leur difference 49, il vient ces quatre nombres quarrez 625, 576, 961, 289, dont les côtez ſont 25, 24, 31, 17.

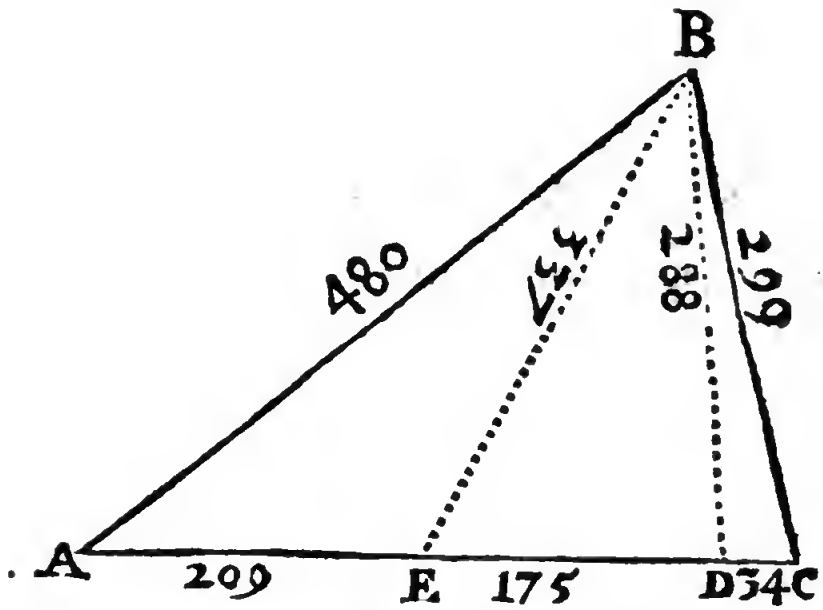
QUESTION VIII.

Trouver en nombres, le triangle obliquangle ABC, dont chaque côté, la perpendiculaire BD, la droite BE, qui diviſe la baſe AC en deux également, & tous les ſegmens de la même baſe, ſoient exprimez par des nombres rationnels.

SI l'on met x pour AB, & y pour AD, l'on aura BD $\gtrdot \sqrt{xx-yy}$, & l'on aura cette Puiſſance à égaler au

au quarré, $xx-yy$, pour le côté duquel prenant $x \ldots \frac{ay}{b}$ en ſorte qu'on ait BD ☍ $x \ldots \frac{ay}{b}$, l'on trouvera x, ou AB ☍ $aa+bb$, & y, ou AD ☍ $2ab$, & par conſéquent BD ☍ $aa-bb$.

De plus, ſi l'on met z pour CD, l'on aura AC ☍ $2ab+lz$, AE ou CE ☍ $\frac{2ab+lz}{2}$, DE ☍ $\frac{2ab-lz}{2}$, BC ☍



$\sqrt{a^4-2aabb+b^4+llzz}$, & BE ☍ $\frac{1}{2}\sqrt{4a^4-4aabb+4b^4-4labz+llzz}$, à cauſe des triangles rectangles BDC, BDE: & afin que la valeur de chacune de ces deux lignes, ou hypotenuſes BC, BE, ſoit rationnelle, il faudra égaler au quarré chacune de ces deux Puiſſances,

$$a^4-2aabb+b^4+llzz.$$
$$4a^4-4aabb+4b^4-4labz+llzz.$$

Leur difference eſt $3a^4-2aabb+3b^4-4labz$, dont les deux nombres produiſans ſont $2ab$, $\frac{3a^3}{4b}+\frac{3b^3}{4a}-lz+\frac{ab}{2}$,

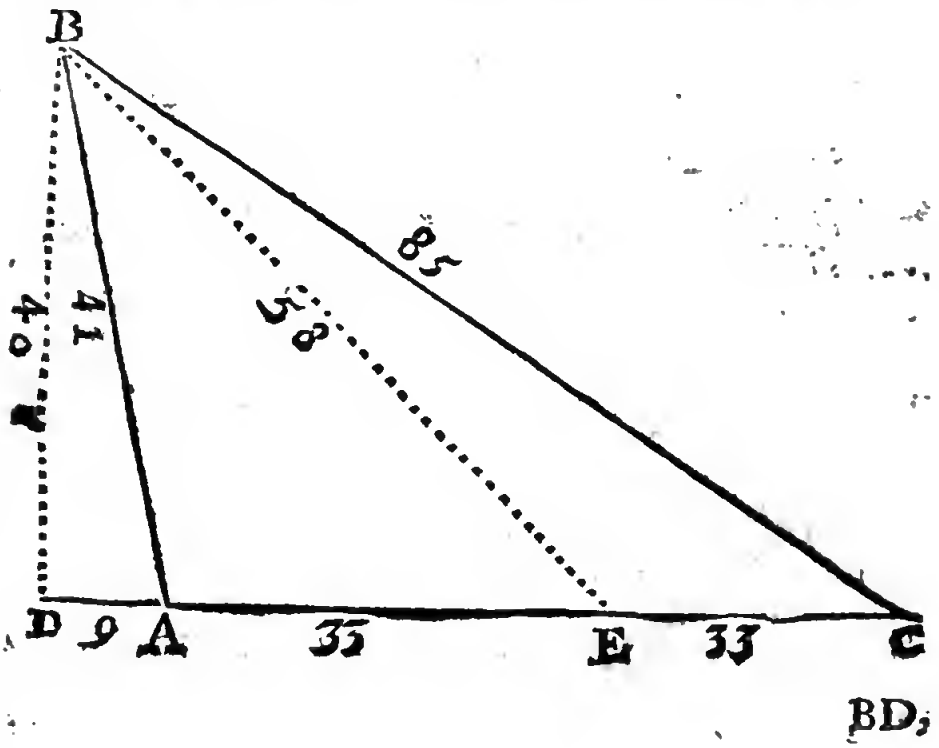
dont

dont le quarré étant égalé à la plus grande Puiſſance $4a^4 - 4aabb + b^4 - 4labz + llzz$, on trouvera lz, où $CD \propto \frac{9a^8 + 8aa^4b^4 - 5aa^6bb - 5aaab^6 + 9b^8}{24a^5b - 48a^3b^3 + 24ab^5}$, & les lignes du triangle ABC, ſeront en entiers de cette grandeur,

$AB \propto 27a^7b - 24a^5b^3 - 24a^3b^5 + 24ab^7$.
$AC \propto 9a^8 - 4a^6bb - 10aa^4b^4 - 4aab^6 + 9b^8$.
$AD \propto 48a^6bb - 96a^4b^4 + 48aab^6$.
$BC \propto 9a^8 - 20a^6bb + 22a^4b^4 - 20aab^6 + 9b^8$.
$BD \propto 27a^7b - 72a^5b^3 + 72a^3b^5 - 24ab^7$.
$BE \propto \frac{1}{2}9a^8 + 14a^6bb - 37a^4b^4 + 14aab^6 + \frac{1}{2}9b^8$.
$AE \propto \frac{1}{2}9a^8 - 2a^6bb - 5a^4b^4 - 2aab^6 + \frac{1}{2}9b^8 \propto CE$.
$DE \propto \frac{1}{2}9a^8 + 50a^6bb - 91a^4b^4 + 50aab^6 - \frac{1}{2}9b^8$.
$CD \propto 9a^8 + 8a^6b^4 - 52a^6bb - 52aab^6 + 9b^8$.

Si l'on ſuppoſe $a \propto 2$, & $b \propto 1$, les lignes du triangle qu'on cherche, ſeront en moindres termes de telle grandeur que vous les voyez marquées dans la Figure.

Si vous voulez un triangle, où la perpendiculaire BD tombe en dehors, mettez x pour BC, & y pour



BD,

BD, & vous trouverez CD ☌ $\sqrt{xx-yy}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $xx-yy$, pour le côté duquel prenant $x \ldots \frac{ay}{b}$, en ſorte qu'on ait CD ☌ $x \ldots \frac{ay}{b}$, l'on trouvera x, ou BC ☌ $aa+bb$, & y, ou BD ☌ $2ab$, & par conſéquent CD ☌ $aa+bb$.

De plus ſi l'on met z pour AD, on aura AC ☌ $aa-bb-lz$, AE ☌ $\frac{aa-bb-lz}{2}$, DE ☌ $\frac{aa-bb+lz}{2}$, AB ☌ $\sqrt{4aabb+llzz}$, & BE ☌ $\frac{1}{2}\sqrt{a^4+14aabb+b^4+2laaz-2lbbz+llzz}$. Ainſi nous aurons ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$4aabb+llzz.$$
$$a^4+14aabb+2laaz-2lbbz+llzz.$$

Leur difference eſt $a^4+10aabb+b^4+2laaz-2lbbz$, dont les deux nombres produiſans ſont $aa-bb$, $\frac{a^4+10aabb+b^4}{aa-bb}+2lz$. La moitié de leur difference eſt $\frac{6aabb}{aa-bb}+lz$, dont le quarré étant égalé à la plus petite Puiſſance $4aabb+llzz$, on trouvera lz ☌ $\frac{a^4-11aabb+b^4}{3aa-3bb}$, & les lignes du triangle ABC, ſeront de cette grandeur,

AB ☌ $a^4+7aabb+b^4$.	BD ☌ $6ab^3-6a^3b$.
AC ☌ $2a^4+5aabb+2b^4$.	CE ☌ $a^4+\frac{1}{2}5aabb+b^4$.
AD ☌ $a^4-11aabb+b^4$.	BE ☌ $2a^4+\frac{1}{2}aabb+2b^4$.
BC ☌ $3a^4-3b^4$.	DE ☌ $2a^4-\frac{1}{2}17aabb+2b^4$.
AE ☌ $a^4+\frac{1}{2}5aabb+b^4$.	CD ☌ $3a^4-6aabb+3b^4$.

Si l'on ſuppoſe a ☌ 4, & b ☌ 1, les lignes du triangle qu'on cherche, ſeront en moindres termes de telle grandeur que vous les voyez marquées dans la Figure.

L'angle B dans cette Figure & dans la premiere eſt néceſſairement aigu, parce que la ligne BE ſe rencon-

tre dans l'un & dans l'autre triangle, eſſentiellement plus grande que la moitié de la baſe AC, c'eſt-à-dire, que AE, ou que CE. Mais ſi vous voulez un triangle, où l'angle B ſoit obtus, auquel cas la perpendiculaire BD doit tomber en dedans, ſuivez cette methode, qui pourra ſervir auſſi pour un triangle oxygone, comme vous verrez.

Cherchons premierement trois triangles rectangles de même hauteur, pour les trois BDA, BDE, BDC, ce qui ſe fera aiſément par le moyen du Plan-plan *abcd*, en cette ſorte.

Formez des plans *ab*, *cd*, ce triangle rectangle,
$2abcd$, $aabb-ccdd$, $aabb+ccdd$.
Formez des plans *ac*, *bd*, cet autre triangle rectangle,
$2abcd$, $aacc-bbdd$, $aacc+bbdd$.
Formez des plans *ad*, *bc*, ce troiſiéme triangle rectangle,
$2abcd$, $aadd-bbcc$, $aadd+bbcc$.

Ces trois triangles étant ainſi trouvez, ſuppoſez

BD ☽ $2abcd$.
DE ☽ $aabb-ccdd$.
BE ☽ $aabb+ccdd$.
CD ☽ $aacc-bbdd$.
BC ☽ $aacc+bbdd$.
AD ☽ $aadd-bbcc$.
AB ☽ $aadd+bbcc$.

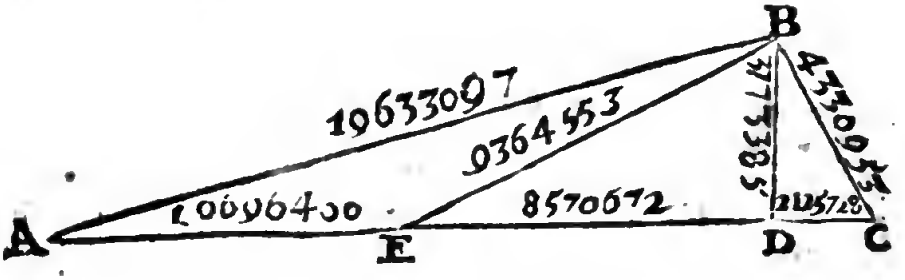
& alors vous aurez

AC ☽ $aadd-bbcc+aacc-bbdd$.
AE ☽ $\frac{1}{2}aadd-\frac{1}{2}bbcc+\frac{1}{2}aacc-\frac{1}{2}bbdd$.

Si de AE, ou CE, on ôte CD, on aura $\frac{1}{2}aadd-\frac{1}{2}bbcc+\frac{1}{2}bbdd-\frac{1}{2}aacc$ pour DE ☽ $aabb-ccdd$. Ainſi l'on aura cette Equation, $\frac{1}{2}aadd-\frac{1}{2}bbcc+\frac{1}{2}bbdd-\frac{1}{2}aacc$ ☽ $aabb-ccdd$, dans laquelle on trouvera d ☽ $\sqrt{\frac{aacc+bbcc+2aabb}{aa+bb+2cc}}$.

Ainſi l'on aura cette Double Egalité,

$aacc+$



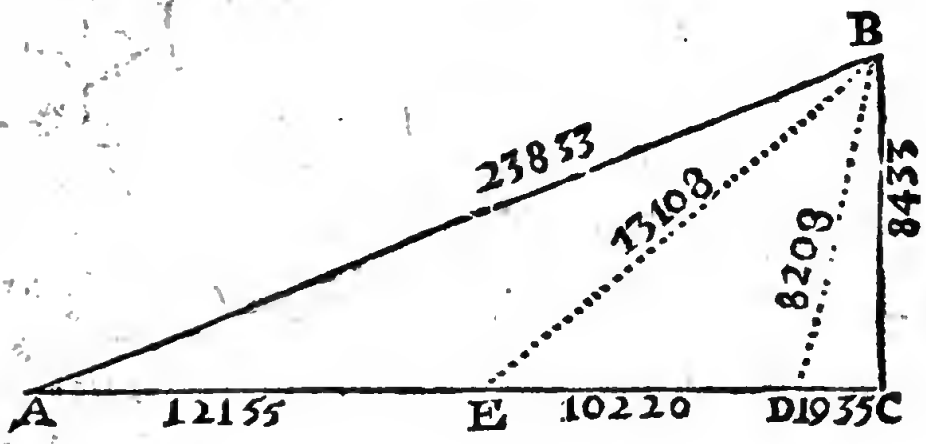
$$\frac{aacc+bbcc+2aabb.}{aa+bb+2cc.}$$

Egalez la ſeconde Puiſſance $aa+bb+2cc$ au quarré $aa-2ab+bb+4ac-4bc+4cc$, dont le côté eſt $a...b+2c$, pour avoir $b \mathrel{\text{Ø}} \frac{cc+2ac}{a+2c}$, & la premiere Puiſſance $aacc+bbcc+2aabb$, ſe changera en celle-ci, $\frac{c^6+4ac^5+10aac^4+12a^3c^3+}{aa+4ac+\frac{9a^4cc}{4cc}}$; & comme elle a ſa Racine quarrée $\frac{c^3+2acc+3aac}{a+2c}$, la valeur de la grandeur d ſera rationnelle, ſçavoir $\frac{c^3+2acc+3aac}{aa+2ac+3cc}$, & la Queſtion ſera reſoluë.

Mais pour trouver la raiſon que l'on doit donner aux deux quantitez indéterminées a, c, pour rendre obtus l'angle ABC, il faut qu'afin que cela arrive, la ligne BE ſoit moindre que la moitié AE, ou CE de la baſe AC. Ainſi l'on aura cette Inégalité $\frac{1}{2}aadd-\frac{1}{2}bbcc+\frac{1}{2}aacc-\frac{1}{2}bbdd\oplus aabb+ccdd$, dans laquelle on trouvera $bb\ominus\frac{aacc-aadd-2ccdd}{2aa+cc+dd}$, & en reſtituant aux deux quantitez b, d, leurs valeurs trouvées $\frac{cc+2ac}{a+2c}$, $\frac{c^3+2acc+3aac}{a+2ac+3cc}$, l'on aura une autre Inégalité, où l'on pourra déterminer la raiſon des deux quantitez indéterminées a, c, & l'on connoîtra que la quantité a doit être plus grande que le quintuple de la quantité b, autrement l'angle B ſera aigu.

Si donc on ſuppoſe $a \gtrless 7$, & $b \gtrless 1$, on trouvera $b \gtrless \frac{1}{3}$, & $d \gtrless \frac{17}{11}$, & les lignes du triangle qu'on cherche, ſeront en entiers & en moindres termes de telle grandeur que vous les voyez marquées dans la figure.

Mais ſi l'on donne aux deux quantitez indéterminées a, c, une raiſon moindre que celle de 5, à 1, l'angle B deviendra aigu: comme ſi l'on ſuppoſe $a \gtrless 4$, &



$c \gtrless 1$, on trouvera $b \gtrless \frac{1}{3}$, & $d \gtrless \frac{17}{9}$, & les lignes du triangle qu'on cherche, ſeront telles que vous les voyez marquées dans cette figure.

QUESTION IX.

Trouver un triangle rectangle, dont l'aire ſoit égale à celle d'un triangle rectangle donné.

AVant que de venir à la pratique, nous donnerons ici un canon général pour reſoudre cette Queſtion, qui eſt de Monſieur De Fermat.

Formez du quarré de l'hypotenuſe du triangle rectangle donné, & du quadruple de ſon aire, un autre triangle rectangle, dont chaque côté & l'hypotenuſe doivent être diviſez par le double ſolide ſous l'hypotenuſe & la difference des quarrez

quarrez des deux côtez du triangle rectangle donné, pour avoir le triangle rectangle qu'on cherche.

Comme ſi l'on donne le triangle rectangle $4 \text{☽} m$, $3 \text{☽} n$, $5 \text{☽} a$, ſi des deux nombres aa, $2mn$, on forme ce triangle rectangle, $4aann$, $a^4 - 4mmnn$, $a^4 + 4mmnn$, le triangle rectangle qu'on cherche, ſera $\frac{4aamn.\ a^4-4mmnn.\ a^4+4mmnn}{2aamm-2ann}$, ou $\frac{1200,\ 49^{\circ}\ 1201}{70}$, à cauſe de $m \text{☽} 4$, de $n \text{☽} 3$, & de $a \text{☽} 5$.

Pour vous faire voir l'origine de ce canon, nous chercherons un triangle rectangle, dont l'aire ſoit égale à celle du propoſé m, n, a, en cette ſorte.

L'aire du triangle propoſé eſt $\frac{mn}{2}$, dont le quadruple $2mn$ étant ajoûté & ôté du quarré de l'hypotenuſe, la ſomme $aa+2mn$ eſt le quarré de la ſomme des deux côtez, & la difference $aa-2mn$ eſt le quarré de la difference des mêmes côtez, par la nature du triangle rectangle.

Il ne faut donc que trouver un autre quarré que aa, pour le quarré de l'hypotenuſe du triangle rectangle qu'on cherche, en ſorte que ſi à ce quarré l'on ajoûte & qu'on ôte le quadruple de l'aire donnée, ſçavoir $2mn$, la ſomme & la difference ſoient des nombres quarrez, dont les côtez donneront la ſomme & la difference des deux côtez du triangle rectangle qu'on cherche, lequel par conſéquent ſera connu.

Pour trouver un ſemblable quarré, mettez $x+a$ pour le côté de ce quarré, ou pour l'hypotenuſe du triangle rectangle qu'on cherche, dont le quarré $xx+2ax+aa$ étant augmenté & diminué de $2mn$, on aura ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$xx+2ax+aa+2mn.$$
$$xx+2ax+aa-2mn.$$

ou bien à cauſe de $aa \propto mm+nn$, on aura cette autre Double Egalité,

$$xx+2ax+mm+2mn+nn.$$
$$xx+2ax+mm-2mn+nn.$$

Pour éviter un long calcul, ſuppoſez $m+n \propto c$, & $m-n \propto d$, & vous aurez cette autre Double Egalité,

$$xx+2ax+cc.$$
$$xx+2ax+dd.$$

dont on rendra les deux derniers termes égaux, en multipliant la premiere Puiſſance par le quarré dd, & la deuxiéme par le quarré cc, pour avoir ces deux dernieres Puiſſances à égaler au quarré,

$$ddxx+2addx+ccdd.$$
$$ccxx+2accx+ccdd.$$

Leur difference eſt $ccxx-ddxx+2accx-2addx$, dont les deux nombres produiſans ſont $cx+dx$, $cx-dx+2ac-2ad$. La moitié de leur ſomme eſt $cx+ac-ad$, dont le quarré $ccxx+2accx+aacc-2acdx-2aacd+aadd$ étant égalé à la plus grande Puiſſance $ccxx+2accx+ccdd$, l'on trouvera $x \propto \frac{aacc+aadd-2aacd-ccdd}{2acd}$ & l'hypotenuſe du triangle qu'on cherche, ſera $\frac{aacb+aadd-ccdd}{2acd}$, ou $\frac{a^4+4mmnn}{2amm-2ann}$, à cauſe de $c \propto m+n$, & de $d \propto m-n$.

Si le quarré de l'hypotenuſe ainſi trouvée, ſçavoir $\frac{a^8+8a^4mmnn+16m^4n^4}{4aam^4-8aammnn+4aan^4}$, ou $\frac{m^8+12m^6nn+38m^4n^4+12n^6mm+n^8}{4aam^4-8aammnn+4aan^4}$ à cauſe de $aa \propto mm+nn$, eſt augmenté & diminué de $2mn$, ou de $\frac{8aam^5n-16aam^3n^3+8an^5m}{4aam^4-8aammnn+4aan^4}$, qui eſt une Fraction équivalente, ou de $\frac{8nm^7-8n^3m^5-8n^5m^3+4mn^7}{4aam^4-8aammnn+4aan^4}$, à cauſe de $aa \propto mm+nn$, l'on aura ces deux quarrez

$$m^8+8nm^7$$

$$\frac{m^8+8nm^7+12nnm^6-8n^3m^5+38m^4n^4-8n^5m^3+12n^6mm+8mn^7+n^8}{4aam^4-8aammnn+4aan^4}$$

$$\frac{m^8-8nm^7+12nnm^6-8n^3m^5+38m^4n^4+8n^5m^3+12n^6mm-8mn^7+n^8}{4aam^4-8aammnn+4aan^4}$$

dont les côtez, $\frac{m^4+4nm^3\ldots 2mmnn+4mn^3+n^4}{2amn-2ann}$, $\frac{m^4\ldots 4nm^3\ldots 2mmnn\ldots 4mn^3+n^4}{2amm-2ann}$, seront la somme & la difference des deux côtez du triangle qu'on cherche: c'eſt pourquoi la moitié de la ſomme, & la moitié de la difference de ces deux Racines quarrées, ſçavoir $\frac{m^4-2mmnn+n^4,\ 4nm^3+4mn^3}{2amm-2ann}$, ou $\frac{a^4-4mmnn,\ 4aamm}{2amm-2ann}$, à cauſe de $mm+nn \propto aa$, ſeront les deux côtez du triangle rectangle qu'on cherche, lequel par conſéquent ſera $\frac{4aamn,\ a^4-4mmnn,\ a^4+4mmnn}{2amm-2ann}$, tel qu'il a été trouvé par le Canon précedent.

* QUESTION X.

Trouver deux nombres, tels que ſi de leur ſomme on ôte le quarré de chacun, il reſte deux nombres quarrez.

SI l'on met x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, l'on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$lx+ly-xx.$$
$$lx+ly-yy.$$

Leur difference eſt $yy-xx$, dont les deux nombres produiſans ſont $y+x$, $y-x$. La moitié de leur ſomme eſt y, dont le quarré yy étant egalé à la plus grande Puiſſance $lx+ly-xx$, on aura $lx+ly \propto xx+yy$. Ainſi l'on voit que les deux nombres qu'on cherche, doivent être tels que *leur ſomme ſoit égale à celle de leurs*

* *Cette Queſtion manque à* 12. 2. *Dioph.*

quarrez, ce qui ne peut arriver qu'en Fraction : c'eſt pourquoi l'on ſuppoſera $x \propto \frac{a}{z}$, & $y \propto \frac{b}{z}$, en ſorte que la raiſon des deux nombres qu'on cherche, ſoit égale à celle des deux nombres indéterminez a, b, & alors au lieu de l'Equation précedente $lx+ly \propto xx+yy$, on aura celle-ci, $\frac{a+b}{z} \propto \frac{aa+bb}{zz}$, dans laquelle on trouvera $z \propto \frac{aa+bb}{a+b}$, & par conſéquent $x \propto \frac{aa+ab}{aa+bb}$, & $y \propto \frac{bb+ab}{aa+bb}$, pour les deux nombres qu'on cherche.

Si l'on ſuppoſe $a \propto 2$, & $b \propto 3$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{10, 15}{13}$: & ſi l'on ſuppoſe $a \propto 1$, & $b \propto 2$, les deux nombres ſeront $\frac{3, 6}{5}$.

Nous avons tiré de cette ſolution indefinie, le Canon ſuivant, qui eſt aſſez ſimple. *Si l'on multiplie deux nombres quelconques rationnels, chacun par leur ſomme, & qu'on diviſe chaque produit par la ſomme des quarrez de ces deux mêmes nombres; on aura les deux nombres qu'on cherche.*

Remarque.

A cauſe des deux quantitez indéterminées a, b, qui demeurent dans la ſolution indefinie, & qui expriment la raiſon des deux nombres trouvez, on voit aiſément que l'on peut *donner aux deux nombres qu'on cherche, telle raiſon que l'on voudra :* comme ſi on leur veut donner la raiſon de 4 à 5, l'on ſuppoſera $a \propto 4$, & $b \propto 5$, & alors les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{36, 45}{41}$.

Mais on peut ajoûter d'autres conditions à cette Queſtion, qui la rendront plus belle, comme ſi l'on veut *que la ſomme des deux nombres qu'on cherche ſoit un nombre*

nombre quarré, il faudra égaler au quarré leur Dénominateur commun $aa+bb$, pour le côté duquel prenant $a...\frac{bc}{d}$, l'on trouvera en entiers $a \gg cc-dd$, & $b \gg 2cd$, & les deux nombres qu'on cherche, seront,

$$\frac{c^4+2c^3d-2ccdd-2cd^3+d^4,\ 2c^3d+4ccdd-2cd^3}{c^4+2ccdd+d^4}$$

dont la somme $\frac{c^4+4c^3d+2ccdd-4cd^3+d^4}{c^4+2ccdd+d^4}$, a sa Racine quarrée $\frac{cc+2cd-dd}{cc+dd}$, qui est égale à la somme des deux côtez de ce triangle rectangle,

$$\frac{2cd,\ cc-dd,\ cc+dd}{cc+dd}.$$

Si l'on suppose $c \gg 1$, & $d \gg 2$, ou $c \gg 2$, & $d \gg 1$, les deux nombres qu'on cherche, seront $\frac{21,\ 28}{25}$, dont la somme $\frac{49}{25}$ est un nombre quarré, dont le côté $\frac{7}{5}$ est égal à la somme des côtez de ce triangle rectangle $\frac{3.4.5}{5}$.

On tire de cette solution indefinie, cet autre Canon, qui rendra quarrée la somme des deux nombres qu'on cherche. *Si on multiplie les deux côtez d'un triangle rectangle, chacun par leur somme, & qu'on divise chaque produit par le quarré de l'hypotenuse, on aura les deux nombres qu'on cherche.*

Si au lieu de cette condition, l'on veut que la somme des deux nombres soit un cube, il faudra égaler au cube cette Puissance $a^3+aab+abb+b^3$, pour le côté duquel prenant $a+\frac{1}{3}b$, on trouvera $b \gg 9$, & $a \gg -13$: & comme cette derniere valeur est niée, l'on supposera $a \gg z-13$, & au lieu de la Puissance precédente

a^3+aab

$a^3+aab+abb+b^3$, on aura celle-ci à égaler au cube, $z^3-30zz+354z-1000$, pour le côté duquel prenant $-10+\frac{59z}{10}$, l'on trouvera $z \propto \frac{54500}{2977}$, & par conſéquent $a \propto \frac{15799}{2977}$, & à cauſe de $b \propto 9$, ſi on multiplie 15799, & 9, par le Dénominateur 2977, on aura en entiers $a \propto 15799$, & $b \propto 26793$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{336455504,\ 570583728}{48373662 5}$, dont la ſomme $\frac{907039132}{48373662 5}$ a ſa Racine cubique $\frac{968}{785}$.

Mais ſi l'on veut que la ſomme des deux nombres ſoit un Quarré-quarré, il faut que la ſomme $a+b$ ſoit un quarré, & que la ſomme $aa+bb$ ſoit un quarré-quarré. C'eſt à dire que a & b, doivent être les côtez d'un triangle rectangle, dont l'hypotenuſe & la ſomme des deux côtez ſoient des nombres quarrez. Tel eſt le triangle rectangle,

106165229352 0, 456548602776 1, 468729861028 9.

qui a été trouvé à la *Queſt.* 13. *des ſimples Egalitez.* Si donc on ſuppoſe $a \propto 106165229352 0$, & $b \propto 456548602776 1$, les deux nombres qu'on cherche, ſe trouveront de cette grandeur,

$$\frac{256906213820868945030818 41,\ 597406430474225627349912 0}{219707682620171906966635 21}$$

dont la ſomme $\frac{3166468568682915077748096 1}{219707682620171906966635 21}$, a ſa Racine quarré-quarrée $\frac{237215 9}{216705 17}$.

Il eſt évident que pour faire que la ſomme des deux nombres ſoit un quarré, les deux quantitez indéterminées a, b, doivent être les côtez d'un triangle rectangle, parce que cette ſomme eſt $\frac{aa+2ab+bb}{aa+bb}$, dont le Numerateur $aa+2ab+bb$ étant un nombre quarré, dont le côté eſt $a+b$, on doit ſeulement égaler au quarré le Dénominateur $aa+bb$, qui eſt le quarré de l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont a & b, en repréſentent les deux côtez.

Il eſt évident auſſi que pour faire que la même ſomme $\frac{aa+2ab+bb}{aa+bb}$ ſoit un cube, il faut égaler au cube cette Puiſſance $a^3+aab+abb+b^3$, qui eſt le produit ſolide ſous le Dénominateur $aa+bb$, & la Racine quarree $a+b$ du Numerateur $aa+2ab+bb$, parce qu'ainſi l'on rend cubique cette ſomme.

Enfin il eſt manifeſte que pour faire que la même ſomme $\frac{aa+2ab+bb}{aa+bb}$ ſoit un Quarré-quarré, il faut égaler au quarré-quarré le Dénominateur $aa+bb$, & au quarré ſeulement la ſomme $a+b$, parce que cette ſomme $a+b$ eſt la Racine quarrée du Numerateur $aa+2ab+bb$.

QUESTION XI.

Trouver quatre nombres proportionnels, en ſorte que ſi à leur Plan-plan on ajoûte le ſolide de trois quelconques, il vienne quatre nombres quarrez.

SI l'on met x, y, xz, yz, pour les quatre nombres qu'on cherche, ils ſeront proportionnels, & ſelon les conditions de la Queſtion, l'on aura en moindres termes, ces quatre Puiſſances à égaler au quarré,

$$xx+lx.$$
$$yy+ly.$$
$$xxzz+llxz.$$
$$yyzz+llyz,$$

Egalez la premiere $xx+lx$, au quarré $\frac{aaxx}{bb}$, pour avoir $x \propto \frac{lbb}{aa-bb}$: & la deuxiéme $yy+ly$ au quarré $\frac{ccyy}{dd}$, pour avoir $y \propto \frac{ldd}{cc-dd}$, & au lieu des deux dernieres

nieres Puiſſances, on aura en entiers, ces deux autres à égaler au quarré,

$$b^4zz+laabbz-lb^4z.$$
$$d^4zz+lccdz-ld^4z.$$

Multipliez la premiere par le quarré d^4, & la derniere par le quarré b^4, pour avoir ces deux autres Puiſſances à égaler au quarré,

$$b^4d^4zz+laabbd^4z-lb^4d^4z.$$
$$b^4d^4zz+lccdb^4z-lb^4d^4z.$$

Leur difference eſt $laabbd^4z-lccdb^4z$, dont les deux nombres produiſans ſont $2bbddz$, $\frac{laadd-lbcc}{2}$. La moitié de leur ſomme eſt $bbddz+\frac{laadd-lbcc}{4}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puiſſance $b^4d^4zz+laabbd^4z-lb^4d^4z$, l'on trouvera $z\mathrel{\text{)o}}\frac{a^4d^4-2aabbcdaa+b^4c^4}{8aabbd^4-16b^4d^4+8ccddb^4}$ & les quatre nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$bb.$$
$$aa-bb$$
$$dd$$
$$cc-dd$$
$$a^4bbd^4-2aab^4ccdd+b^6c^4$$
$$8a^4bbd^4-24aab^4d^4+8aab^4cc+16b^6d^4-8b^6ccdd$$
$$b^4c^4d^4-2aabbccd^4+a^4d^6$$
$$8aabbccd^4-24b^4ccd^4+8b^4c^4dd-8aabbd^6+16b^4d^6$$

Si l'on ſuppoſe $a\mathrel{\text{)o}}2$, $b\mathrel{\text{)o}}1$, $c\mathrel{\text{)o}}5$, & $d\mathrel{\text{)o}}1$, on trouvera $z\mathrel{\text{)o}}\frac{49}{576}$, $x\mathrel{\text{)o}}\frac{1}{3}$, & $y\mathrel{\text{)o}}\frac{7}{24}$, & les quatre nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{192,\ 24,\ 392,\ 49}{576}$.

On peut donner à la proportion de ces quatre nombres

bres indefinis telle raiſon que l'on voudra: comme ſi on lui veut donner une raiſon égale à celle des deux nombres donnez g, f, on fera cette analogie, $\frac{bb}{aa-bb}, \frac{dd}{cc-dd}$ :: g, f, ou $cc-bb, aa-bb$ :: g, f, en ſuppoſant $d \gtrless b$, d'où l'on tirera cette Equation, $ccf-bbf \gtrless aag-bbg$, dans laquelle on trouvera $c \gtrless \sqrt{bbf+aag-bbg}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $bbf+aag-bbg$, ce qui ſera facile, parce que la ſomme 1 des unitez eſt un nombre quarré. Suppoſez $b \gtrless \omega...a$, pour avoir cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $aaff-2affω+2afgω-fgωω+ffωω$, pour le côté duquel prenant $af..mω$, on trouvera en entiers $ω \gtrless 2fm+2fg-2ff$, & $a \gtrless mmz+fg-ff$, & par conſéquent $b \gtrless mm-fg+ff-2fm$, &c.

Si $f \gtrless 1$, & $g \gtrless 2$, & que l'on ſuppoſe $m \gtrless 4$, l'on trouvera $ω \gtrless 10$, $a \gtrless 17$, $b \gtrless 7$, $c \gtrless 23$, & $z \gtrless \frac{1}{49}$, & les quatre nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{98, 49, 20, 10}{480}$.

* QUESTION XII.

Trouver deux nombres Plans ſemblables, en ſorte que ſi de chacun on ôte le quarré de l'autre, il reſte deux nombres quarrez.

COmme ces deux nombres ne peuvent être exprimez qu'en Fractions, on les pourra très-commodément ſuppoſer ainſi, $\frac{xx \cdot yy}{zω}$, & ſelon les conditions de la Queſtion, l'on aura en entiers ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$zωxx-y^4.$$
$$zωyy-x^4.$$

Egalez

* *Cette Queſtion manque à 22 2. Dioph.*

Premiere ſolution.

Egalez la premiere $z\omega xx - y^4$, au quarré $aabb$, pour avoir $z \propto \frac{aabb+y^4}{xx\omega}$: & la deuxiéme $z\omega yy - x^4$ au quarré $ccdd$, pour avoir le même $z \propto \frac{ccdd+x^4}{yy\omega}$, & par conſéquent cette Equation, $\frac{aabb+y^4}{xx\omega} \propto \frac{ccdd+x^4}{yy\omega}$, laquelle par l'Antitheſe & par l'Iſomerie ſe reduit à celle-ci, $y^6 + aabbyy - ccddxx - x^6 \propto 0$. Il en faut détruire les deux termes $aabbyy$, x^6, qui ſont de differente affection, par cette Equation, $aabbyy - x^6 \propto 0$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{x^3}{ab}$, & par conſéquent $y^3 \propto \frac{x^9}{a3b3}$, & au lieu de l'Equation précedente $y^6 + aabbyy - ccddxx - x^6 \propto 0$, on aura celle-ci, $y^6 - ccddxx \propto 0$, dans laquelle on trouvera $y^3 \propto cdx$, & parce que nous avons déja trouvé auparavant $y^3 \propto \frac{x^9}{a3b3}$, nous aurons cette Equation, $\frac{x^9}{a3b3} \propto cdx$, dans laquelle on trouvera $d \propto \frac{x^8}{a3b3c}$, & au lieu de $z \propto \frac{aabb+y^4}{xx\omega}$, ou de $z \propto \frac{ccdd+x^4}{yy\omega}$, l'on aura $z \propto \frac{a^6b^6+x^{12}}{a4b4xx\omega}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{a^4b^4x^4}{a^6b^6+x^{12}}, \quad \frac{aabbx^8}{a^6b^6+x^{12}}.$$

Si l'on ſuppoſe $a \propto 1$, $b \propto 1$, & $x \propto 2$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{16.256}{4058}$.

Seconde ſolution.

Ou bien parce que la premiere Puiſſance $z\omega xx - y^4$, a ces deux nombres produiſans zx, $\omega x - \frac{y^4}{zx}$, on les égalera enſemble par cette Equation, $zx \propto \omega x - \frac{y^4}{zx}$,

dans

dans laquelle on trouvera $\omega \gtrless \frac{xxzz+y^4}{xxz}$, & au lieu de la ſeconde Puiſſance $z\omega yy - x^4$, on aura en entiers celle-ci à égaler au quarré, $y^6+xxyyzz-x^6$, pour le côté duquel prenant y^3, on trouvera $z \gtrless \frac{xx}{y}$: c'eſt pourquoi au lieu de $\omega \gtrless \frac{xxzz+y^4}{xxz}$, on aura $\omega \gtrless \frac{x^6+y^6}{x^4y}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{x^4yy,\ xxy^4}{x^6+y^6}.$$

Si l'on ſuppoſe $x \gtrless 3$, & $y \gtrless 7$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{3969,\ 21609}{118378}$.

Vous voyez par cette ſeconde ſolution, que l'on peut donner aux deux nombres qu'on cherche, la raiſon de deux quarrez donnez: mais on aura une autre ſolution, ſi l'on ſuppoſe $z \gtrless u \ldots \frac{xx}{y}$, & alors la Puiſſance précedente $y^6+xxyyzz-x^6$, ſe changera en celle-ci, $uuxxyy-2ux^4y+x^6$, laquelle étant égalée au quarré $uuxxyy$, l'on trouvera $u \gtrless \frac{y^5}{2,4}$: c'eſt pourquoi au lieu de $z \gtrless u \ldots \frac{xx}{y}$, on aura $z \gtrless \frac{y^5 \ldots 2x^6}{2x^4y}$, & au lieu de $\omega \gtrless \frac{xxzz+y^4}{xxz}$, on aura $\omega \gtrless \frac{4x^{12}+y^{12}}{4x^8yy}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

$$\frac{4x^{10}yy,\ 4x^8y^4}{4x^{12}+y^{12}}.$$

Parce que nous avons ſuppoſé $x \gtrless 3$, & $y \gtrless 7$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{11573604,\ 63011844}{13843412965}.$$

Re-

Remarque.

Au lieu de donner la raiſon de deux quarrez aux deux nombres qu'on cherche, on leur peut donner la raiſon de deux cubes, ou de deux autres Puiſſances ſemblables telles que l'on voudra. Comme ſi on leur veut donner la raiſon de deux cubes, on mettra $\frac{x^3, y^3}{uz\omega}$ pour ces deux nombres, & ſelon les conditions de la Queſtion, l'on aura en entiers, ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$uz\omega x^3 - y^6.$$
$$uz\omega y^3 - x^6.$$

Egalez la premiere $uz\omega x^3 - y^6$, au quarré a^6, pour avoir $uz\omega \propto \frac{a^6+y^6}{x^3}$: & la deuxiéme $uz\omega y^3 - x^6$, au quarré b^6, pour avoir le même $uz\omega \propto \frac{b^6+x^6}{y^3}$, & par conſéquent cette Equation, $\frac{a^6+y^6}{x^3} \propto \frac{b^6+x^6}{y^3}$, ou $a^6y^3 + y^9 \propto b^6x^3 + x^9$, que vous reduirez en ces deux,

$$x^9 \propto a^6y^3.$$
$$y^9 \propto b^6x^3.$$

Dans la premiere $x^9 \propto a^6y^3$, on trouvera $y \propto \frac{x^3}{aa}$, & par conſéquent $y^9 \propto \frac{x^{27}}{a^{18}}$; & la deuxiéme $y^9 \propto b^6x^3$, ſe changera en celle-ci, $\frac{x^{27}}{a^{18}} \propto b^6x^3$, dans laquelle on trouvera $b \propto \frac{x^4}{a^3}$, & au lieu de $uz\omega \propto \frac{a^6+y^6}{x^3}$, ou de $yz\omega \propto \frac{b^6+y^6}{y^3}$, on aura $uz\omega \propto \frac{a^{18}+x^{18}}{a^{12}x^3}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{a^{12}x^6 \; a^6x^{12}}{a^{18}+x^{18}}.$$

$$\frac{a^{12}x^6,\ a^6x^{12}}{a^{18}+x^{18}}.$$

Si l'on ſuppoſe $a \gtrdot 1$, & $x \gtrdot 2$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{64}{65},\frac{4096}{4161}$.

Au lieu de donner aux deux nombres qu'on cherche, la raiſon de deux Puiſſances, on peut leur donner telle raiſon que l'on voudra, pourvû qu'elle ſe égale à celle d'un quarré donné à un nombre donné compoſé de ce quarré & d'un autre quarré donné. Comme ſi l'on donne ces deux nombres, $4 \gtrdot bb$, $13 \gtrdot aa+bb$, où l'on a, $a \gtrdot 3$, & $b \gtrdot 2$, l'on aura $\frac{bb,\ aa+bb}{xx+yy}$, pour les deux nombres qu'on cherche, & par ce qui a été dit dans la *Queſt.* 27. *Des ſi Egalitez*, on trouvera $\frac{b4,\ aab4+b4}{a4+3aabb+b4}$, pour les deux nombres qu'on cherche.

Parce que nous avons ſuppoſé $a \gtrdot 3$, & $b \gtrdot 2$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{16,\ 52}{97}$.

Il s'enſuit que l'on peut donner aux deux nombres qu'on cherche, une raiſon double, ſçavoir en ſuppoſant $b \gtrdot a$, auquel cas les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{1,2}{5}$, par le moyen deſquels on en peut trouver autant d'autres que l'on voudra dans la même raiſon double, ſçavoir en mettant $\frac{1,\ 2}{x+5}$, pour les deux nombres qu'on cherche, & alors ſelon les conditions de la Queſtion, l'on aura cette Double Egalité,

$$\begin{matrix} 1x+1. \\ 2x+9. \end{matrix}$$

La difference de ces deux Puiſſances eſt $1x+8$, dont les deux nombres produiſans ſont 4, $\frac{1}{4}x+2$. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{1}{8}x+3$, dont le quarré $\frac{1}{64}xx+\frac{1}{4}x+9$, étant égalé à la plus grande Puiſſance $2x+9$,

on trouvera $x \gtrless 80$, & les deux nombres qu'on cherche, seront $\frac{1,2}{81}$.

Pour avoir une solution indefinie, égalez la premiere Puissance $1x+1$, au quarré indéterminé aa, pour avoir $x \gtrless aa-1$, & la deuxéme $2x+9$, au quarré indéterminé bb, pour avoir le même $x \gtrless \frac{1}{2}bb-\frac{9}{2}$, & par conséquent cette Equation, $aa-1 \gtrless \frac{1}{2}bb-\frac{9}{2}$, dans laquelle on trouvera $b \gtrless \sqrt{2aa+7}$. Ainsi aura cette Puissance à égaler au quarré, $2aa+7$, qui sera facile, parce que la somme 9 des unitez est nombre quarré. Supposez donc $a \gtrless y+1$, pour cette autre Puissance à égaler au quarré, $2yy+$

pour le côté duquel prenant $3 \ldots \frac{cy}{d}$, on trou-

ve $y \gtrless \frac{6cd+4dd}{cc-2dd}$: c'est pourquoi au lieu de $a \gtrless y+1$, aura $a \gtrless \frac{cc+6cd+2dd}{cc-2dd}$, & au lieu de $b \gtrless \sqrt{2aa+7}$, on aura $b \gtrless \frac{3cc+4cd+6dd}{cc-2dd}$, & enfin au lieu de $x \gtrless aa-1$, ou de $x \gtrless \frac{1}{2}bb-\frac{9}{2}$, l'on aura $x \gtrless \frac{12c^3d+44ccdd+24cd^3}{c^4-4ccdd+4d^4}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront

$$\frac{c^4-4ccdd+4d^4,\ 2c^4-8ccdd+8d^4}{5c^4+12c^3d+24ccdd+24cd^3+20d^4}.$$

Si l'on suppose $c \gtrless 2$, & $d \gtrless 1$, ou bien $c \gtrless 1$, & $d \gtrless 1$, les deux nombres qu'on cherche, seront $\frac{1,2}{81}$, comme auparavant.

Mais si l'on suppose $c \gtrless 1$, & $d \gtrless 2$, les deux nombres qu'on cherche, seront $\frac{1,1}{13}$: & si l'on suppose $c \gtrless 3$, & $d \gtrless 2$, les deux nombres qu'on cherche, seront $\frac{1,2}{2813}$.

Que si l'on suppose $c \gtrless 7$, & $d \gtrless 5$, les deux nombres qu'on cherche, seront $\frac{1,2}{9141}$, & ainsi des autres.

Pour

Pour faire que les Numerateurs des deux nombres qu'on cherche, ſoient toûjours les mêmes nombres 1, 2, il faut que les trois quantitez a, b, x, ſoient exprimées par des nombres entiers, ce qui ſe peut faire en égalant à 1, le Dénominateur commun $cc-2dd$ par cette Equation, $cc-2dd \propto 1$, dans laquelle on trouvera $c \propto \sqrt{2dd+1}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $2dd+1$, pour le côté duquel prenant $1 \ldots \frac{dm}{n}$, l'on trouvera $d \propto \frac{2mn}{mm-2nn}$, & par conſéquent $c \propto \frac{mm+2nn}{mm-2nn}$.

Si l'on ſuppoſe $m \propto 1$, & $u \propto 1$, on trouvera $d \propto -2$, $a \propto 9$, $b \propto 13$, & $x \propto 80$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{1.2}{17}$, comme auparavant.

Si l'on ſe ſert des deux valeurs trouvées 3, 2, pour les lettres c, d, en ſuppoſant $m \propto 3$, & $n \propto 2$, on trouvera $c \propto 17$, $d \propto 12$, $a \propto 1801$, $b \propto 2547$, & $x \propto 4243600$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{1.2}{4243600}$.

Pareillement ſi l'on ſe ſert des deux dernieres valeurs trouvées 17, 12, des mêmes lettres c, d, en ſuppoſant $m \propto 17$, & $n \propto 12$, on trouvera $c \propto 577$, $d \propto 408$, $a \propto 2078353$, $b \propto 2939235$, & $x \propto 4319551192608$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{1.2}{4319551192608}$.

On peut auſſi ſuppoſer $m \propto 7$, & $n \propto 5$, & alors on trouvera $c \propto 99$, $d \propto 70$, $a \propto 61181$, $b \propto 86523$, & $x \propto 37431114760$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{1.2}{37431114760}$.

On peut encore ſuppoſer $m \propto 4$, & $n \propto 3$, & alors on trouvera $c \propto 17$, & $d \propto 12$, comme auparavant. Ce qui fait voir que l'on peut auſſi égaler à 2, le Dénominateur commun $cc-2dd$, par cette Equation, $cc-2dd \propto 2$, dans laquelle on trouvera $c \propto \sqrt{2dd+2}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $2dd+2$, ce qui ſera facile, parce que la ſomme 4 des

unitez eſt un nombre quarré. Suppoſez donc $d \mathrel{)\!(} z+1$, & vous aurez cette autre Puiſſance à égaler au quarré, $2zz+4z+4$, pour le côté duquel prenant $2 \ldots \frac{mz}{n}$, on trouvera $z \mathrel{)\!(} \frac{4mn+4nn}{mm-2nn}$. C'eſt pourquoi au lieu de $z+1$, on aura $d \mathrel{)\!(} \frac{mm+4mn+2nn}{mm-2nn}$, & au lieu de $\sqrt{2dd+2}$, on aura $c \mathrel{)\!(} \frac{2mm+4mn+4nn}{mm-2nn}$.

l'on ſuppoſe $m \mathrel{)\!(} 1$, & $n \mathrel{)\!(} 1$, on trouvera $z \mathrel{)\!(} -8$, $\ldots$, $d \mathrel{)\!(} -7$, $a \mathrel{)\!(} 309$, $b \mathrel{)\!(} 437$, & $x \mathrel{)\!(} 95480$, & x nombres qu'on cherche, ſeront de cette gran-$\ldots \frac{2}{95485}$.

on ſe ſert des deux valeurs trouvées 10, 7, des x quantitez c, d, en ſuppoſant $m \mathrel{)\!(} 10$, & $n \mathrel{)\!(} 7$, trouvera $z \mathrel{)\!(} 238$, $c \mathrel{)\!(} 338$, $d \mathrel{)\!(} 239$, $a \mathrel{)\!(} 356589$, $\ldots \mathrel{)\!(} 504293$, & $x \mathrel{)\!(} 127155714920$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{1.2}{127155714925}$.

On peut auſſi ſuppoſer, comme auparavant, $m \mathrel{)\!(} 3$, & $n \mathrel{)\!(} 2$, & alors on trouvera $z \mathrel{)\!(} 40$, $c \mathrel{)\!(} 58$, $d \mathrel{)\!(} 41$, $a \mathrel{)\!(} 10497$, $b \mathrel{)\!(} 14845$, & $x \mathrel{)\!(} 110187008$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur, $\frac{1,2}{110187013}$.

Pareillement on peut ſuppoſer, comme auparavant, $m \mathrel{)\!(} 4$, & $n \mathrel{)\!(} 3$, & alors on trouvera $z \mathrel{)\!(} -42$, $c \mathrel{)\!(} -58$, $d \mathrel{)\!(} -41$, $a \mathrel{)\!(} 10497$, $b \mathrel{)\!(} 14845$, & $x \mathrel{)\!(} 110187008$, comme auparavant.

Cette Queſtion ſe trouve reſoluë en pluſieurs autres manieres dans nôtre *Diophante*, & auſſi à la fin d'un Livre que nous avons publié de l'uſage de l'*Inſtrument Univerſel.*

QUESTION

*QUESTION XIII.

Trouver deux nombres, dont la ſomme étant ajoûtée au quarré de chacun, il vienne deux nombres quarrez.

SI l'on met x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, leur ſomme $x+y$ étant ajoûtée au quarré de chacun, donnera ces deux Puiſſances à égaler à quarré,

$$xx+lx+ly.$$
$$yy+lx+ly.$$

Premiere Solution.

Egalez la premiere $xx+lx+ly$, au quarré xx dont le côté eſt $x+l$, pour avoir $y \text{) } x+l$: & la xiéme $yy+lx+ly$, ſe changera en celle-ci, $xx+4lx$ laquelle étant égalée au quarré $xx-2ax+aa$, dont le côté eſt $x \ldots a$, on trouvera $x \text{) } \frac{aa-2ll}{2a+4l}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront

$$\frac{aa-2ll,\ aa+2la+2ll.}{2a+4l}.$$

Si l'on ſuppoſe $a \text{) } 2$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{2}{4}, \frac{6}{4}$: & ſi l'on ſuppoſe $a \text{) } 3$, les deux nombres ſeront $\frac{7}{10}, \frac{17}{10}$, & ainſi des autres en mettant pour la quantité indéterminée, a, tel nombre que l'on voudra, pourvû que ſon quarré ſoit plus grand que 2. Ainſi en ſuppoſant $a \text{) } \frac{1}{2}$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{2}{28}, \frac{19}{28}$: & en ſuppoſant $a \text{) } \frac{17}{12}$, les deux nombres ſeront $\frac{289}{504}, \frac{985}{504}$.

Seconde Solution.

Cette methode eſt la même que celle de Diophante mais on aura une ſolution plus générale, ſi on égale la premiere Puiſſance $xx+lx+ly$ au quarré $xx+2ax+aa$

* *Queſt.* 23. 2. *Dioph.*

pour avoir $ly \gtrless aa+2ax-lx$, & alors au lieu de la seconde Puiſſance $yy+lx+ly$, on aura celle-ci à égaler au quarré, $a^4+4a^3x+4aaxx-2laax-4laxx+llxx+llaa+2llax$, pour le côté duquel prenant $2ax...lx...ab$, on trouvera $x \gtrless \frac{abb-lla-a^3}{4aa+4ab+2ll-2la-2lb}$, & les deux ombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

$$\frac{2bb-lla-a^3,\ 2a^4-3la^3+3llaa-2laab+4a^3b-labb+2aabb}{4aa+4ab+2ll-2la-2lb}$$

ſi l'on ſuppoſe $a \gtrless 1$, & $b \gtrless 2$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{1}{4}, \frac{5}{4}$, comme auparavant: mais ſuppoſe $a \gtrless 2$, & $b \gtrless 3$, les deux nombres ſeront ainſi en ſuite, en donnant aux deux quantitez nommées a, b, telle valeur que l'on voudra, pourvû que bb ſoit plus grand que $aa+la$, à cauſe du numerateur $abb-lla-a^3$, du premier nombre trouvé. Ainſi en ſuppoſant $a \gtrless 5$, & $b \gtrless 6$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{1}{4}, \frac{109}{4}$; & en ſuppoſant $a \gtrless 3$, & $b \gtrless 4$, les deux nombres ſeront $\frac{1}{4}, \frac{41}{4}$.

Troiſiéme Solution.

Pour avoir une ſolution plus ſimple, au lieu de prendre $2ax...lx...ab$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puiſſance précedente $a^4+4a^3x+4aaxx-2laax-4laxx+llxx+llaa+2llax$, prenez $2aa+2ax...lx+lb$, & alors vous trouverez $x \gtrless \frac{2aab-laa+lbb}{2la+2lb-4ab}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{2aab-laa+lbb,\ 2abb+laa-lbb}{2la+2lb-4ab}$$

Si l'on ſuppoſe $a \gtrless \frac{1}{2}$, & $b \gtrless 1$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$, comme auparavant: mais ſi l'on ſuppoſe $a \gtrless \frac{1}{2}$, & $b \gtrless 2$, les deux nombres ſeront $\frac{1}{4}, \frac{13}{4}$, auſſi comme auparavant. Que ſi l'on ſuppoſe $a \gtrless$

&

& $b \propto 3$, les deux nombres seront $\frac{41}{2}$, encore comme auparavant. Mais si l'on suppose $a \propto \frac{1}{2}$, & $b \propto 4$, les deux nombres seront $\frac{71}{2}$.

Quatriéme Solution.

Si vous voulez une quatriéme solution, égalez la premiere Puissance $xx+lx+ly$, au quarré $xx-2ax+aa$. pour avoir $x \propto \frac{aa-ly}{2a+l}$, & la seconde Puissance $yy+lx+ly$ se changera en celle-ci, $yy+\frac{2aly+lly}{2a+l}$, laquelle étar égalée au quarré $yy-2by+bb$, on trouvera $y \propto \frac{2abb-laa+lbb}{2la+2lb+4ab}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2aab+lla-lbb,\ 2abb-laa+lbb.}{2la+2lb+4ab}$$

Si l'on suppose $a \propto 1$, & $b \propto 2$, les deux nomb qu'on cherche, seront $\frac{11}{14}$, qu'on auroit aussi trou en supposant $a \propto 2$, & $b \propto 1$. Mais si l'on suppose $a \propto 2$, & $b \propto 3$, ou $a \propto 3$, & $b \propto 2$, les deux nombres seront $\frac{10\ 41}{34}$.

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'unité, mettez $\frac{x,\ y}{z}$, pour les deux nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez en entiers, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx+xz+yz.$$
$$yy+xz+yz.$$

Cinquiéme Solution.

Egalez la premiere $xx+xz+yz$, au quarré $xx+2ax+aa$, pour avoir $z \propto \frac{aa+2ax}{x+y}$, & au lieu de la seconde $yy+xz+yz$, on aura celle-ci à égaler au quarré, $yy+aa+2ax$, pour le côté duquel prenant $y+b$, on

trouvera $y \gtrless \frac{aa-bb+2ax}{2b}$, & au lieu de $z \gtrless \frac{aa+2ax}{x+y}$, on aura $z \gtrless \frac{2aab+4abx}{aa-bb+2ax+2bx}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{2aabx-2b^3x+4abxx+4bbxx}{4^{-2aabb+b^4+4a^3x\ 2b^3x\cdot 4abbx+2aabx+4abxx+4aaxx}_{4aabb+8abbx}}.$$

Si l'on ſuppoſe $a \gtrless 1$, $b \gtrless 2$, & $x \gtrless 2$, on trouvera $z \gtrless \frac{20}{9}$, & $y \gtrless \frac{1}{4}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{21}{10}, \frac{9}{10}$.

Ou bien égalez la premiere Puiſſance $xx+xz+yz$, quarré aa, pour avoir $z \gtrless \frac{aa-xx}{x+y}$, & la ſeconde $+xz+yz$ au quarré bb, pour avoir le même $z \gtrless \frac{bb-yy}{x+y}$, & par conſéquent cette Equation, $\frac{aa-xx}{x+y} \gtrless \frac{bb-yy}{x+y}$, ou $aa-xx \gtrless bb-yy$, dans laquelle on trouvera $y \gtrless \sqrt{xx-aa+bb}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $xx-aa+bb$, pour le côté duquel prenant $x \ldots c$, on trouvera $x \gtrless \frac{ax-bb+cc}{cc}$, & par conſéquent $y \gtrless \frac{aa-bb-cc}{2c}$, & $z \gtrless \frac{2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4}{4aac-4bbc}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{2a^4-4aabb+2aacc-2bbcc+2b^4}{2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4}$$

$$\frac{2a^4-4aabb-2aacc+2bbcc+2b^4}{2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4}.$$

Si

Si l'on suppose $a \propto 6$, $b \propto 5$, & $c \propto 3$, on trouvera $z \propto \frac{114}{311}$, $y \propto \frac{1}{3}$, & $x \propto \frac{10}{3}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront $\frac{1140}{311}$.

Mais si l'on suppose $a \propto 6$, $b \propto 4$, & $c \propto 3$, on trouvera $z \propto \frac{91}{42}$, $y \propto \frac{11}{6}$, & $x \propto \frac{19}{6}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront $\frac{1729}{91}$.

Que si l'on suppose $a \propto 4$, $b \propto 3$, & $c \propto 2$, on trouvera $z \propto \frac{115}{56}$, $y \propto \frac{3}{4}$, & $x \propto \frac{11}{4}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront $\frac{154}{11}$.

Sixiéme Solution.

Au lieu de prendre $x \ldots c$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance $xx - aa + bb$, on peut prendre $x \ldots b \ldots c$, & alors on trouvera $x \propto \frac{aa+2bc+cc}{2b+2c}$, c'est pourquoi au lieu de $y \propto \sqrt{xx-aa+bb}$, on aura $y \propto \frac{cc+2bc+bb-aa}{2b+2c}$, & au lieu de $z \propto \frac{aa-xx}{x+y}$, ou de $z \propto \frac{bb-yy}{x+y}$, on aura $z \propto \frac{4a^2bb+4aabc+2aacc-4bbcc-4bc^3-a^4-c^4}{4b^3+12bbc+12bcc+4c^3}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{2c^4+8bc^3+10bbcc+4b^3c+2aacc+4aabc+2aabb}{4aabb+4aabc+2aacc-4bbcc-4bc^3-a^4-c^4}$$

$$\frac{2c^4+8bc^3+14bbcc+12b^3c+4b^4-2aacc-4aabc-2aabb}{4aabb+4aabc+2aacc-4bbcc-4bc^3-a^4-c^4}.$$

Si l'on suppose $a \propto 1$, $b \propto \frac{1}{2}$, & $c \propto \frac{1}{2}$, on trouvera $z \propto \frac{15}{64}$, $y \propto \frac{1}{8}$, & $x \propto \frac{7}{8}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront $\frac{56}{15}$.

Septiéme Solution.

Si vous voulez resoudre les deux Puissances précedentes par la methode de Diophante, l'on considerera que

que leur difference eſt $x-y$, dont les deux nombres produiſans ſont $x+y$, $x-y$, dont le premier $x+y$ étant multiplié par ce nombre indéterminé $\frac{a}{b}$, & le ſecond $x-y$ étant diviſé par le même nombre indéterminé $\frac{a}{b}$, l'on aura ces deux autres nombres produiſans $\frac{ax+ay}{b}$, $\frac{bx-by}{a}$. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{aax+aay+bbx-bby}{2ab}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puiſſance $xx+xz+yz$, l'on trouvera $z \propto \frac{a^4xx+2a^4xy+a^4yy-2aabbxx}{+b^4xx-2a^2b^2yy-2b^4xy+b^4yy+4aabby}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{4aabbxx+4aabbxy,\ 4aabbyy+4aabbxy}{a^4xx+2a^4xy+a^4yy-2aabbxx+b^4xx-2aabbyy-2b^4xy+b^4yy}.$$

Si l'on ſuppoſe $x \propto 2$, $y \propto 1$, $a \propto 2$, & $b \propto 1$, l'on trouvera $z \propto \frac{16}{35}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{32}{35}, \frac{16}{35}$.

Huitiéme Solution.

Cette Queſtion ſe peut reſoudre très-facilement par le moyen d'un triangle rectangle quelconque, comme du triangle rectangle $3 \propto a$, $4 \propto b$, $5 \propto c$, ſçavoir en mettant $bx-ax$, cx, pour les deux nombres qu'on cherche, & $2abxx$ pour leur ſomme $bx-ax+cx$, car ainſi le quarré de chacun étant ajoûté à cette ſomme ſuppoſée $2abxx$, donnera deux nombres quarrez, par la nature du triangle rectangle: & il n'y aura plus qu'à égaler la ſomme ſuppoſée à la ſomme des deux nombres, par cette Equation, $2abxx \propto bx-ax+cx$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{b+c-a}{2ab}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

aa—

$$\frac{aa-2ab+bb-ac+bc,\ cc-ac+bc}{2ab}.$$

Parce que nous avons supposé $a \propto 3$, $b \propto 4$, & $c \propto 5$, les deux nombres qu'on cherche, seront $\frac{1}{2}{}^{5}$, que l'on peut aussi trouver par le moyen de ce Canon, qui se tire de la resolution précedente.

Si l'on multiplie l'hypotenuse, & la difference des deux côtez d'un triangle rectangle chacune par l'hypotenuse augmentée de la même difference, & qu'on divise chaque produit par le quadruple de l'aire du même triangle rectangle, on aura les deux nombres qu'on cherche.

Neuviéme Solution.

Pour avoir une solution indefinie, formez des deux nombres indéterminez a & b, ce triangle rectangle, $2ab$, $aa-bb$, $aa+bb$, & mettez $bbx+2abx-aax$, $aax+bbx$, pour les deux nombres qu'on cherche, & $4a^3bxx-4ab^3xx$ pour leur somme $2bbx+2abbx$, afin que cette somme supposée $4a^3bxx-4ab^3xx$ étant ajoûtée au quarré de chacun, face deux nombres quarrez, par la nature du triangle rectangle, & il ne restera plus qu'à resoudre cette Equation, $4a^3bxx-4ab^3xx \propto 2bbx+2abx$, dans laquelle on trouvera $x \propto \frac{1}{2ab+bb}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{2ab+bb-aa,\ aa+bb}{2aa-2ab}.$$

Si l'on suppose $a \propto 2$, & $b \propto 1$, les deux nombres qu'on cherche, seront $\frac{1}{2}{}^{5}$, comme auparavant: mais si l'on suppose $a \propto 3$, & $b \propto 2$, les deux nombres seront tels, $\frac{7}{8}{}^{13}$, que l'on peut aussi trouver par le moyen de ce Canon, qui se tire de la solution précedente.

Si l'on diviſe l'hypotenuſe, & la difference des deux côtez d'un triangle rectangle, chacune par l'excès de l'hypotenuſe ſur la même difference, on aura les deux nombres qu'on cherche.

Dixiéme Solution.

Ou bien ayant formé des deux quantitez indéterminées a, b, ce triangle rectangle, $2ab$, $aa-bb$, $aa+bb$, formez des deux autres quantitez indéterminées c, d, cet autre triangle rectangle, $2cd$, $cc-dd$, $cc+dd$: & multipliez ce ſecond triangle rectangle par ab, & le premier par cd, pour avoir ces deux triangles rectangles de même hauteur,

$$2abcd,\ aacd-bbcd,\ aacd+bbcd.$$
$$2abcd,\ abcc-abdd,\ abcc+abdd.$$

que vous multiplierez chacun par la quantité indéterminée x, pour avoir ces deux autres triangles rectangles de même hauteur,

$$2abcdx,\ aacdx-bbcdx,\ aacdx+bbcdx.$$
$$2abcdx,\ abccx-abddx,\ abccx+abddx.$$

Après cela mettez les deux baſes $aacdx-bbcdx$, $abccx-abddx$, pour les deux nombres qu'on cherche, & le quarré $4aabbccddxx$ de la hauteur commune $2abx$ pour leur ſomme $aacdx-bbcdx+abccx-abddx$, & il n'y aura plus, comme auparavant, qu'à reſoudre cette Equation, $aacdx-bbcdx+abccx-abddx \mathrel{)\!(} 4aabbccddxx$, dans laquelle on trouvera $x \mathrel{)\!(} \frac{aacd-bbcd+abcc-abdd}{4aabbccdd}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{a^4cd-2aabbcd+a^3bcc-a^3bdd+b^4cd-ab^3cc+ab^3dd.}{4aabbcd}$$

$$\frac{aac^3d-bbc^3d+abc^4-2abccdd-aacd^3+bbcd^3+abd^4.}{4abccdd}$$

Si

Si l'on ſuppoſe $a \gg 2$, $b \gg 1$, $c \gg 3$, & $d \gg 1$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{225400}{144}$, que l'on peut auſſi trouver par le moyen de ce canon, que nous avons tiré de la ſolution précedente.

Si on multiplie les deux baſes de deux triangles rectangles de même hauteur, chacune par leur ſomme, & qu'on diviſe chaque produit par le quarré de la hauteur commune, on aura les deux nombres qu'on cherche, dont la ſomme ſera toüjours un nombre quarré.

Remarque.

Parce que les triangles de même hauteur ſont d'un uſage frequent, nous enſeignerons ici en paſſant quelques autres manieres, pour *trouver en nombres deux triangles rectangles de même hauteur.*

Ayant pris a volonté quatre quantitez proportionnelles, comme aa, ab, ac, bc, formez des deux extrêmes aa, bc, & des deux moyens ab, ac, ces deux triangles rectangles,

$$2aabc,\ a^4 \ldots bbcc,\ a^4 + bbcc.$$
$$2aabc, aabb \ldots aabc,\ aabb + aacc.$$

qui ſeront de même hauteur par la nature de la proportion Geometrique.

Si vous voulez que les deux triangles rectangles ſoient ſemblables, multipliez ſéparément un triangle rectangle quelconque, comme $2ab$, $aa - bb$, $aa + bb$, par les deux côtez $2ab$, $aa - bb$, pour avoir ces deux autres triangles rectangles,

$$2a^3b - 2ab^3,\ 4aabb,\ 2a^3b + 2ab^3.$$
$$2a^3b - 2ab^3,\ a^4 - 2aabb + b^4,\ a^4 - b^4.$$

qui ſeront ſemblables & de même hauteur.

Nous avons enſeigné dans la *Queſt.* 8. une autre maniere pour trouver deux & même trois triangles rectangles de meme hauteur. C'eſt pourquoi nous n'en parlerons pas davantage.

On

On peut ajoûter à la Queſtion propoſée quelques autres conditions, qui la rendront plus belle. Comme ſi l'on veut que la raiſon des deux nombres qu'on cherche, ſoit donnée, comme par exemple double: on n'a qu'à donner aux deux quantitez indéterminées x, y, qui demeurent dans la Septiéme ſolution, & qui expriment la raiſon des deux nombres, une raiſon double, en ſuppoſant par exemple $x \gg 2$, & $y \gg 1$, comme il a été fait.

Ou bien ſi les termes de la raiſon donnée ſont $2 \gg a$, & $1 \gg b$, l'on mettra ax, bx, pour les deux nombres qu'on cherche, afin qu'ils ſoient dans cette raiſon, & alors on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$aaxx+llax+llbx.$$
$$bbxx+llax+llbx.$$

Onziéme Solution.

Leur difference eſt $bbxx-aaxx$, qui a ces deux nombres produiſans, cx, $\frac{bbx-aax}{c}$, la quantité c, étant indéterminée. La moitié de leur ſomme eſt $\frac{1}{2}cx+\frac{bbx+aax}{2}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puiſſance $bbxx+llax+llbx$, on trouvera $x \gg \frac{4acc+4bcc}{a^4-2aabb+b^4-2aacc-2bbcc+c^4}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{4aacc+4abcc,\ 4bbcc+4abcc}{a^4-2aabb+b^4-2aacc-2bbcc+c^4}.$$

Parce que nous avons ſuppoſé $a \gg 2$, & $b \gg 1$, ſi l'on ſuppoſe $c \gg \frac{1}{2}$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{32.16}{33}$: & ſi l'on ſuppoſe $c \gg \frac{1}{3}$, les deux nombres ſeront $\frac{54.17}{160}$.

Si

Si vous voulez une autre ſolution, multipliez la premiere Puiſſance $aaxx+llax+llbx$ par le quarré bb, & la ſeconde $bbxx+llax+llbx$ par le quarré aa, pour avoir ces deux autres Puiſſances à égaler au quarré,

$$aabbxx+llabbx+llb^3x.$$
$$aabbxx+llaabx+lla^3x.$$

Douziéme Solution.

Leur difference eſt $llabbx+llb^3x-llaabx-lla^3x$, dont les deux nombres produiſans ſont $2abx$, $\frac{lla^2bb+llb^3-llaab-lla^3}{2ab}$. La moitié de leur ſomme eſt $abx+\frac{lla^2bb+llb^3-llaab-lla^3}{2ab}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puiſſance $aabbxx+llabbx+llb^3x$, on trouvera $x\,\text{ø}\,\frac{a^6-a^5b^4+2a^5b^5+b^6-a^4bb-4a^3b^3+2a^5b}{8a^5bb+8aab^5+8a^4b^3+8a^3b^4}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{a^6-a^5b^4+2ab^5+b^6-a^4bb-4a^3b^3+2a^5b}{8a^4bb+8ab^5+8a^3b^3+8aab^4}.$$
$$\frac{a^6-a^5b^4+2ab^5+b^6-a^4bb-4a^3b^3+2a^5b}{8a^5b^4+8a^5b+8a^3b^3+8a^4bb}.$$

Parce que nous avons ſuppoſé $a\,\text{ø}\,2$, & $b\,\text{ø}\,1$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{19}{165}\frac{27}{}$.

Treiziéme Solution.

On peut auſſi faire que les deux nombres qu'on cherche, ſoient dans la raiſon de deux nombres donnez, comme des deux $2\,\text{ø}\,r$, & $1\,\text{ø}\,s$, par le moyen de la Sixiéme ſolution, où nous avons trouvé

$$x\,\text{ø}\,\frac{cc+2bc+aa}{2b+2c}.$$
$$y\,\text{ø}\,\frac{cc+2bc+2bb-aa}{2b+2c}.$$

Sça-

Sçavoir en faiſant cette analogie, $cc+2bc+aa$, $cc+2bc+2bb-aa :: r, f$, d'où l'on tire cette Equation $ccf+2bcf+aaf \propto ccr+2bcr+2bbr-aar$, dans laquelle on trouvera $c \propto \frac{\sqrt{aar+aaf-bbr-bbf}}{r+f}-b$. Ainſi on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $\frac{aar+aaf-bbr-bbf}{r+f}$, laquelle a ces deux nombres produiſans $r+f$, $\frac{aa-bb}{r-f}$; qu'on égalera enſemble par cette Equation, $r+f \propto \frac{aa-bb}{r-f}$, dans laquelle on trouvera $a \propto \sqrt{bb+rr-ff}$, & l'on aura encore cette Puiſſance à égaler au quarré, $bb+rr-ff$, pour le côté duquel prenant $b...d$, on trouvera $b \propto \frac{dd-rr+ff}{2d}$, & par conſéquent $a \propto \frac{dd+rr-ff}{2d}$, $c \propto \frac{2dr+2df-dd+rr-ff}{2d}$, $x \propto r$, $y \propto f$, & $z \propto \frac{d^4-2ddrr+r^4-2ddff-2rrff+f^4}{4dr+4df}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

$$\frac{4ddrr+4ddrf,\ 4ddff+4ddrf}{d^4-2ddrr-2ddff-2rrff+f^4}.$$

Parce que nous avons ſuppoſé $r \propto 2$, & $f \propto 1$, ſi l'on ſuppoſe $d \propto 4$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{128.64}{35}$: & ſi l'on ſuppoſe $d \propto \frac{1}{2}$, les deux nombres ſeront $\frac{32.16}{35}$.

Puiſque ces deux derniers nombres $\frac{32.16}{35}$, ſont proportionnels aux deux premiers $\frac{128.64}{35}$, on voit aiſément qu'ainſi nous avons *trouvé quatre nombres proportionnels en raiſon donnée, en ſorte que ſi on ajoûte la ſomme des deux premiers à chacun de leurs quarrez, & pareillement la ſomme des deux derniers à chacun de leurs quarrez*,

rez, Tels que ſont les quatre nombres ſuivans $\frac{128, 64, 32, 16}{35}$.

Quatorzieme Solution.

Au lieu de prendre $b...d$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puiſſance $bb+rr-ff$, on peut prendre $b...r...d$, & alors on trouvera $b \propto \frac{dd+2dr+ff}{2d+2r}$, &c.

Parce que nous avons ſuppoſé $r \propto 2$, & $f \propto 1$, ſi l'on ſuppoſe $d \propto 3$, on trouvera $b \propto \frac{15}{5}$, $a \propto \frac{15}{7}$, $c \propto \frac{5}{7}$, $x \propto 2$, $y \propto 1$, $z \propto \frac{11}{17}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{10,25}{35}$.

Quinziéme Solution.

Pour avoir une ſolution plus générale, ſuppoſez $b \propto \omega+f$, & au lieu de la Puiſſance précedente $bb+rr-ff$, vous aurez celle-ci à égaler au quarré, $\omega\omega+2f\omega+rr$, pour le côté duquel prénant $r...\frac{d\omega}{m}$, on trouvera $\omega \propto \frac{2dmr+2mmf}{dd-mm}$, & par conſéquent $b \propto \frac{ddf+mmf+2dmr}{dd-mm}$, &c.

Parce que nous avons ſuppoſé $r \propto 2$, & $f \propto 1$, ſi l'on ſuppoſe $d \propto 3$, & $m \propto 1$, on trouvera $\omega \propto \frac{7}{4}$, $b \propto \frac{11}{4}$, $a \propto \frac{13}{4}$, $c \propto \frac{1}{4}$, $x \propto 2$, $y \propto 1$, & $z \propto \frac{11}{16}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{12,16}{31}$.

Seiziéme Solution.

Vous aurez une ſolution plus générale, en ſuppoſant $b \propto \frac{m\omega}{n}...f$, & $a \propto \frac{p\omega}{q}...r$, & alors l'Equation précedente $rr-ff \propto aa-bb$, ſe changera en celle-ci, $xx-ff \propto \frac{pp\omega\omega}{qq} - \frac{2pr\omega}{q} + rr - \frac{mm\omega\omega}{nn} + \frac{2mf\omega}{n} - ff$, dans laquelle

on trouvera $\omega \text{ ☌ } \frac{2mnpqr-2mnpqs}{ppnn-qqmm}$, & par conſéquent $b \text{ ☌ } \frac{2mnpqr-2mmpqs-ppmns+qqmms}{ppnn-qqmm}$, $a \text{ ☌ } \frac{2nnppq-2mnpps-ppnnr+qqmmr}{ppnn-qqmm}$, &c.

Parce que nous avons ſuppoſé $r \text{ ☌ } 2$, & $s \text{ ☌ } 1$, ſi l'on ſuppoſe $m \text{ ☌ } 1$, $n \text{ ☌ } 1$, $p \text{ ☌ } 3$, & $q \text{ ☌ } 2$, on trouvera $\omega \text{ ☌ } \frac{16}{5}$, $b \text{ ☌ } \frac{11}{5}$, $a \text{ ☌ } \frac{14}{5}$, $c \text{ ☌ } \frac{4}{5}$, $x \text{ ☌ } 2$, $y \text{ ☌ } 1$, & $z \text{ ☌ } \frac{27}{35}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{70.25}{35}$.

Dix-ſeptiéme Solution.

On peut encore donner très-facilement aux deux nombres qu'on cherche, la raiſon donnée $\frac{r}{s}$, par le moyen de la quatriéme ſolution, où nous avons trouvé $y \text{ ☌ } \frac{aa-bb+2ax}{2b}$, ſçavoir en faiſant cette analogie, $2bx$, $aa-bb+2ax :: r, s$, d'où l'on tire cette Equation, $2bs \text{ ☌ } aar-bbr+2arx$, dans laquelle on trouvera $x \text{ ☌ } \frac{aar-bbr}{2bs-2ar}$: c'eſt pourquoi au lieu de $y \text{ ☌ } \frac{aa-bb+2ax}{2b}$, on aura $y \text{ ☌ } \frac{aas-bbs}{2bs-2ar}$, & au lieu de $z \text{ ☌ } \frac{aa+2ax}{x+y}$, on aura $z \text{ ☌ } \frac{2aabs-2abbr}{aar-bbr+aas-bbs}$, &c.

Parce que nous avons ſuppoſé $r \text{ ☌ } 2$, & $s \text{ ☌ } 1$, ſi l'on ſuppoſe $a \text{ ☌ } 2$, & $b \text{ ☌ } 3$, on trouvera $x \text{ ☌ } 5$, $y \text{ ☌ } \frac{1}{2}$, & $z \text{ ☌ } \frac{16}{5}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{80.25}{35}$.

Si au lieu de faire que les deux nombres qu'on cherche, ſoient en raiſon donnée, l'on veut que chacun ſoit un nombre quarré, on ſe ſervira de la troiſiéme ſolution, & alors on aura ces trois Puiſſances à égaler au quarré,

$2la+2lb$

$2la+2lb-4ab.$
$2abb+laa-lbb.$
$2aab-laa+lbb.$

qui ſont le Dénominateur commun, & les Numerateurs des deux nombres trouvez.

Dix-huitiéme Solution.

Egalez la premiere Puiſſance $2la+2lb-4ab$, au quarré ll, pour avoir $a \propto \frac{1}{2}l$, & les deux dernieres Puiſſances ſe changeront en ces deux autres,

$bb+\frac{1}{2}lb-\frac{1}{4}ll.$
$\frac{1}{4}ll.$

dont la derniere $\frac{1}{4}ll$ étant quarrée, il ſuffira d'égaler au quarré la premiere $bb+\frac{1}{2}lb-\frac{1}{4}ll$, ou $4bb+2lb-ll$, pour le côté duquel prenant $2b...c$, on trouvera $b \propto \frac{cc+ll}{4c+2l}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

$$\frac{c^4+2lc^3-llcc-2l^3c+l^4,\ 4llcc+4l^3c+l^4}{16cc+16lc+4ll},$$

qui ont leurs Racines quarrées $\frac{cc+lc...ll,\ 2lc+ll}{4c+2l}$.

Si l'on ſuppoſe $c \propto 1$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{121}{144}$, dont les côtez ſont $\frac{11}{12}$: & ſi l'on ſuppoſe $c \propto 3$, les deux nombres ſeront $\frac{1225}{256}$, dont les côtez ſont $\frac{35}{16}$.

Si outre cette condition, vous voulez que la ſomme des deux nombres quarrez qu'on cherche, ſoit un nombre quarré, ſervez-vous de deux triangles rectangles ſemblables de même hauteur, tels que ſont les deux ſuivans,

$2a^3b-2ab^3,\ 4aabb,\ 2a^3b+2ab^3.$
$2a^3b-2ab^3,\ a^4-2aabb+b^4,\ a^4-b^4.$

& les multipliez châcun par la quantité indéterminée x, pour avoir ces deux autres triangles,

$2a^3bx-2ab^3x$, $4aabbx$, $2a^3bx+2ab^3x$.

$2a^3bx-2ab^3x$, $a^4x-2aabbx+b^4x$, a^4x-b^4x.

Dixneuvième Solution.

Après cela mettez les deux baſes $4aabbx$, $a^4x-2aabbx+b^4x$, pour les deux nombres qu'on cherche, & le quarré $4a^6bbxx-8a^4b^4xx+4aab^6xx$, de la hauteur commune $2a^3bx-2ab^3x$, pour leur ſomme $a^4x+2aabbx+b^4x$, pour avoir $x \text{) } \frac{a^4+2aabb+b^4}{4a^6bb-8a^4b^4+4aab^6}$, & les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{4a^6bb+8a^4b^4+4aab^6,\ a^8-2a^4b^4+b^8}{4a^6bb-8a^4b^4+4aab^6},$$

qui ont leurs Racines quarrées $\frac{2a^3b+2ab^3,\ a4\ldots b4}{2a^3b\ldots 2ab^3}$, & leur ſomme $\frac{a^8+4a^6bb+6a^4b4+4aab^6+b^8}{4a^6bb-8a^4b4+4aab^6}$ a auſſi ſa Racine quarrée $\frac{a4+2aabb+b4}{2a^3b-2ab^3}$.

Si l'on ſuppoſe $a \text{) } 2$, & $b \text{) } 1$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{225,\ 400}{144}$, dont les Racines quarrées $\frac{15.\ 20}{12}$, ſont les deux côtez de ce triangle rectangle, $\frac{15.\ 20,\ 25}{12}$.

Mais ſi l'on ſuppoſe $a \text{) } 3$, & $b \text{) } 2$, les deux nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur, $\frac{4225,24336}{3600}$, dont la ſomme $\frac{28561}{3600}$ a ſa Racine quarrée $\frac{169}{60}$, & dont les Racines quarrées $\frac{65,\ 156}{60}$, ſont les deux côtez de ce triangle rectangle, $\frac{65,\ 156,\ 169}{60}$. D'où nous avons tiré ce canon.

Si

Si on multiplie les deux côtez d'un triangle rectangle, chacun par l'hypotenuſe, & qu'on diviſe chaque produit par le double de l'aire du même triangle, les quarrez des deux quotiens donneront les deux nombres qu'on cherche.

*QUESTION XIV.

Trouver deux nombres quarrez, dont chacun étant diminué du quarré de leur ſomme, il reſte deux nombres quarrez.

SI l'on met x, y, pour les deux nombres qu'on cherche, l'on aura ſelon les conditions de la Queſtion, ces deux Puiſſances à égaler au quarré,

$$lx - xy - 2xy - yy.$$
$$ly - xy - 2xy - yy.$$

Suppoſez, pour avoir un calcul plus aiſé, $x+y \propto z$, pour avoir ces deux autres Puiſſances à égaler au quarré,

$$lx - zz.$$
$$ly - zz.$$

Egalez la premiere $lx-zz$, au quarré $\frac{aazz}{bb}$, & la deuxiéme $ly-zz$ au quarré $\frac{cczz}{dd}$, & vous aurez $lx \propto zz+\frac{aazz}{bb}$, & $ly \propto zz+\frac{cczz}{dd}$, & l'Equation ſuppoſée $x+y \propto z$, ſe changera en celle-ci, $2zz+\frac{aazz}{bb}+\frac{cczz}{dd} \propto z$, dans laquelle on trouvera $z \propto \frac{bbdd}{aadd+bbcc+2bbdd}$, & par conſéquent $x \propto \frac{aabbd^4+b^4d^4}{a^4d^4+2aabbccdd+l4c4+4aabbd4+4ccddb4+4b4d4}$, & $y \propto \frac{ccdlb4+b4d4}{a4d4+2aabbccdd+b4c4+4aabbd4+4ccddb4+4b4d4}$, que l'on rendra

* *Queſt. de Bachet 26. 2.*

rendra quarrez en mettant pour les deux quantitez indéterminées a, b, les deux côtez d'un triangle rectangle, & pareillement pour les deux quantitez indéterminées c, d, les deux côtez d'un autre triangle rectangle. Si l'on ſe ſert de ces deux triangles rectangles 3, 4, 5, & 5, 12, 13, en ſuppoſant a)) 4, b)) 3, c)) 5, & d)) 12, les deux nombres qu'on cherche, ſeront tels, $\frac{140625,\ 342225}{4605316}$, qui ont leurs racines quarrées $\frac{375,\ 585}{2146}$.

Cette Queſtion ſe peut reſoudre en pluſieurs autres manieres, & mêmes on peut trouver plus de deux nombres qui ſatisferont à la Queſtion, par le moyen d'autant de triangles rectangles qu'on demandera de nombres : ce qui eſt ſi évident à l'imitation de ce qui a été fait pour deux nombres, qu'il ſeroit inutile d'en parler davantage. Nous dirons ſeulement, que comme ces deux nombres ne peuvent être exprimez qu'en Fractions, les poſitions auroient été plus naturelles, en mettant $\frac{x,\ y}{z}$, pour ces deux nombres, &c.

Des Triples Egalitez.

LA maniere de reſoudre les Triples Egalitez, ou d'égaler à la fois trois Puiſſances au quarré, eſt de l'invention du R. P. De Billy Jeſuite : & comme quelques-uns ont douté de la bonté de ſa methode ; parce qu'il ne l'a jamais pratiquée qu'en nombres, nous en donnerons la démonſtration dans le Problême ſuivant.

PRO-

PROBLEME I.

Resoudre une Triple Egalité, où la lettre inconnuë n'a qu'une dimension.

POur resoudre une Triple Egalité, où la lettre inconnuë n'a qu'une dimension, chacune des trois Puissances doit avoir son dernier terme quarré, ou pour le moins l'un de ces trois termes doit être quarré, & les deux autres doivent être des Plans semblables, ou dans la raison de deux quarrez, afin que le produit solide des trois mêmes termes soit un nombre quarré, lequel servira pour égaler au quarré le produit solide des trois Puissances, par la plus proche Racine quarrée qu'on en prendra, en sorte qu'on détruise les trois derniers termes, ou seulement les deux derniers, lorsque la quantité connuë qui se trouvera dans le premier terme du produit solide des trois Puissances, sera un nombre quarré, ce qui arrivera, lorsque les quantitez connuës qui multiplieront l'inconnuë dans chaque Puissance, feront des quarrez, ou bien des Plans semblables, afin que le Plan de deux quelconques soit un nombre quarré.

Proposons cette Triple Egalité,

$$ax + dd.$$
$$bx + mm.$$
$$cx + nn.$$

multipliez ensemble ces trois Puissances, & égalez au quarré leur produit solide $ddmmn + ammnnx + bdd nx + cddmmx + abnnxx + acmmxx + bcddxx + abcx^3$, pour le côté duquel prenant $\frac{dmn + ammnnx + bdd nx + cddmmx}{2dmn}$, qui ne détruira que les deux derniers termes, on trouvera

$x \propto \frac{ccd^4m^4 - 2bcmmnnd^4 + bbd^4n^4 - 2acddnnm^4 - 2abddmmn^4 + aam^4n^4}{4abcddmmnn}$, & les trois Puiſſances propoſées $ax+dd$, $bx+mm$, $cx+nn$, ſe changeront en ces trois autres,

$$\frac{ccd^4m^4 + 2bcmmnnd^4 + bbd^4n^4 - 2acddnnm^4 - 2abddmmn^4 + aam^4n^4}{4abcddmmnn}.$$

$$\frac{ccd^4m^4 - 2bcmmnnd^4 + bbd^4n^4 + 2acddnnm^4 - 2abddmmn^4 + aam^4n^4}{4acddmmnn}.$$

$$\frac{ccd^4m^4 - 2bcmmnnd^4 + bbd^4n^4 - 2acddnnm^4 + 2abddmmn^4 + aam^4n^4}{4abddmmnn}.$$

dont les Numerateurs ſont des nombres quarrez: car le côté du premier eſt $cddmm + bddmm \ldots ammnn$, le côté du ſecond eſt $cddmm \ldots bddmm + ammnn$, & le côté du troiſiéme eſt $cddmm \ldots bddmm \ldots ammnn$. Or il eſt évident que les Dénominateurs ſeroient quarrez, ſi les plans ab, ac, bc, étoient quarrez. Ainſi on voit la raiſon pourquoi en ne détruiſant que les deux derniers termes, on ne rendra point quarrées les trois Puiſſances propoſées, à moins que le plan de deux quelconques des trois quantitez connuës qui multiplient l'inconnuë dans chaque Puiſſance ne ſoit un nombre quarré, c'eſt-à-dire, à moins que ces trois quantitez connuës ne ſoient ou des quarrez, ou des plans ſemblables. On voit auſſi la raiſon pourquoi le dernier terme de chaque Puiſſance doit être un nombre quarré, ou bien tous trois tels que leur produit ſolide ſoit un nombre quarré, parce qu'autrement le dernier terme du produit ſolide ſous les trois Puiſſances ne ſeroit pas un nombre quarré, & qu'ainſi on ne pourroit pas égaler au quarré le produit ſolide des trois Puiſſances.

Mais pour faire voir qu'en détruiſant les trois derniers termes du produit ſolide ſous les trois Puiſſances, ces mêmes Puiſſances deviennent quarrées, & qu'ainſi la Triple Egalité propoſée ſe trouve reſoluë,

resoluë, prenez $dmn + \frac{\cdot cddmmx + bddmnx + ammnnx}{2dmm}$

$+ \frac{abnnxx + acmmxx + bcddxx - ccd^4m^4xx - bbd^4n^4xx - aam^4n^4xx}{4dmn \qquad 8d^3m^3n^3}$

pour le côté du quarré qu'il faut égaler au produit solide des trois Puissances, & la valeur de la quantité inconnuë x, se trouvera égale à une Fraction, dont le Dénominateur est

$64aabbd^4m^4n^8 + 64aabcd^4m^6n^6 + 64aaccd^4n^4m^8 + 64abccn^4d^6m^6 - 64ac^3nnd^6m^8 - 64bc^3nnm^6d^8 + c^4d^8m^8 - 64ab^3mmd^6n^8 + 64abbcm^4d^6n^6 - 64b^3cmmnd^8 + 64bbccm^4n^4d^8 + b^4d^8n^8 - 64a^3bddm^6n^8 - 64a^3cddn^6m^8 + a^4m^8n^8$,

& le Numerateur est,

$16abcd^6m^6n^6 - 8accn^4d^6m^8 - 8bccn^4m^6d^8 + 8nnc^3d^8m^8 - 8abbm^4d^6n^8 - 8bbcm^4n^6d^8 + 8mmb^3d^8n^8 - 8aabd^4m^6n^8 + 8a^3ddm^8n^8 - 8aacd^4n^6m^8$,

& les trois Puissances proposées $ax + dd$, $bx + mm$, $cx + nn$, se changeront en trois Fractions quarrées, dont le Dénominateur commun est le même que le précedent, qui a sa Racine quarrée $2abddmmn^4 + 2acddnnm^4 + 2bcmmnnd^4 \ldots ccd^4m^4 \ldots bbd^4n^4 \ldots aam^4n^4$, & dont les Numerateurs sont les trois quarrez suivans

$9a^4ddm^8n^8 - 12a^3bd^4m^6n^8 - 2aabbm^4d^6n^8 - 4abbcd^8m^4n^6 + 4ab^3d^8mmn^8 + b^4d^{10}n^8 - 12a^3cd^4m^8n^6 - 20aabcd^6m^6n^6 - 2aaccd^6m^8n^4 - 4b^3cd^{10}mmn^6 - 4abccd^8m^6n^4 + 6bbccd^{10}m^4n^4 + 4ac^3d^8m^8nn - 4bc^3d^{10}m^6nn + c^4d^{10}m^8$.

$9b^4d^8mmn^8 - 12b^3cd^8m^4n^6 - 2bbccd^8m^6n^4 + 4bc^3d^8m^8nn + c^4d^8m^{10} - 12ab^3d^6m^4n^8 + 20abbcd^6m^6n^6 - 4abccd^6m^8n^4 - 2aabbd^4m^6n^8 - 4ac^3d^6m^{10}nn - 4aabcd^4m^8n^6 + 6aaccd^4m^{10}n^4 + 4a^3bddm^8n^8 - 4a^3cddm^{10}n^6 + a^4m^{10}n^8$.

$9c^4d^8m^8nn - 12bc^3d^8m^6n^4 - 2bbccd^8m^4n^6 + 4b^3cd^8mmn^8 + b^4d^8n^{10} - 12ac^3d^6m^8n^4 + 20abccd^6m^6n^6 - 4abbcd^6m^4n^8 - 20accd^4m^8n^6 - 4ab^3d^6mmn^{10} - 4aabcd^4m^6n^8 + 6aabbd^4m^4n^{10} + 4a^3cddm^8n^8 - 4a^3bddm^6n^{10} + a^4m^8n^{10}$.

dont les côtez sont

$3aadm^4n^4$

$3aadm^4n^4 \ldots 2abd^3mmn^4 \ldots bbd^5n^4 \ldots 2acd^3m^4nn +$
$2bcd^5mmnn \ldots ccd^5m^4.$

$3bbd^4mn^4 \ldots 2bcd^4m^3nn \ldots ccd^4m^5 \ldots 2abbddm^3n^4 +$
$2acddm^5nn \ldots aam^5n^4.$

$3ccd^4m^4n \ldots 2bcd^4mmn^3 \ldots bbd^4n^5 \ldots 2acddm^4n^3 +$
$2abddmmn^5 \ldots aam^4n^5.$

Si les trois Puiſſances propoſées ſont des Fractions de même Dénomination, & que le Dénominateur commun ſoit d'une forme ſemblable à celle des trois Numerateurs, comme dans cette Triple Egalité

$$\frac{bx+ll,\ cx+ll,\ dx+ll}{ax+ll}$$

on multipliera enſemble les trois Numerateurs $bx+ll$, $cx+ll$, $dx+ll$, & le Dénominateur commun $ax+ll$, & on égalera au quarré leur produit plan-plan l^6+l^6ax $+l^6bx+l^6cx+l^6dx+l^4abxx+l^4acxx+l^4adxx+l^4bcxx$ $+l^4bdxx+l^4cdxx+llabcx^3+llabdx^3+llacdx^3+llbcdx^3$ $+abcdx^4$, pour le côté duquel prenant $l^4+\frac{llax+llbx+llcx+lldx}{2}+\frac{abxx+acxx+adxx}{4}+$ $\frac{bcxx+bdxx+cdxx-aaxx-bbxx-ccxx-ddxx}{4}$, on trouvera la valeur de x, égale à une Fraction, dont le Dénominateur eſt

$a^4+b^4+c^4+d^4-4a^3b-4ab^3-4a^3c-4cb^3-4ac^3-$ $4bc^3-4db^3-4da^3-4dc^3-4ad^3-4bd^3-4cd^3+6aabb+$ $6aacc+6aadd+6bbcc+6bbdd+6ccdd+4acbb+4aabc+$ $4abcc+4adbb+4adcc+4aabd+4bdcc+4aacd+4bbcd+$ $4abdd+4acdd+4bcdd-40abcd,$

& le Numerateur eſt

$8a^3+8b^3+8c^3+8d^3-8aab-8aac-8aad-8abb-$ $8acc-8add-8cbb-8dbb-8bcc-8bdd-8dcc-8cdd+$ $16abc+16abd+16acd+16bcd,$

& les trois Puiſſances propoſées $\frac{bx+ll,\ cx+ll,\ dx+ll}{ax+ll}$ ſe

ſe changeront en trois Fractions quarrées, dont le Dénominateur commun eſt

$9a^4+b^4+c^4+d^4-12a^3b-12a^3c-12a^3d+4ab^3+4ac^3+4ad^3-4cb^3-4db^3-4bc^3-4bd^3-4dc^3-4cd^3+20aabd+20aacd+20aabc-4acbb-4adbb-4abcc-4adcc-4abdd-4acdd+4bdcc+4cdbb+4bcdd-2aabb-2aacc-2aadd+6bbcc+6bbdd+6ccdd-24abcd$,

qui a ſa Racine quarrée, $3aa...2ab...bb...2ac+2bc...cc...2ad+2bd...dd+2cd$,

& dont les Numerateurs ſont ces trois quarrez,

$9c^4+a^4+b^4+d^4-12ac^3-12bc^3-12dc^3+4ca^3+4cb^3+4cd^3-4ba^3-4ab^3-4da^3-4db^3-4ad^3-4bd^3+20aadc+20bdcc+20abcc-4aabc-4aabd-4acbb-4acdd-4bcdd-4cdbb+4adbb+4aabd+4abdd-2aacc-2bbcc-2ccdd+6aabb+6aadd+6bbdd-24abcd.$

$9d^4+a^4+b^4+c^4-12ad^3-12bd^3-12cd^3+4da^3+4db^3+4dc^3-4ba^3-4ab^3-4ca^3-4cb^3-4ac^3-4bc^3+20acdd+20bcdd+20abdd-4bdaa-4cdaa-4adbb-4cdbb-4adcc-4bdcc+4acbb+4bcaa+4abcc-2aadd-2bbdd-2ccdd+6aabb+6aacc+6bbcc-24abcd.$

$9a^4+b^4+c^4+d^4-12ab^3-12cb^3-12db^3+4ba^3+4bc^3+4cb^3-4ca^3-4ac^3-4da^3-4dc^3-4ad^3-4cd^3+20adbb+20cdbb+20acbb-4bcaa-4bdaa-4abcc-4abdd-4bcdd-4bdcc+4adcc+4cdaa+4acdd-2aabb-2bbcc-2bbdd+6aacc+6aadd+6ccdd-24abcd.$

dont le côtez ſont

$3cc...2ac...aa...2bc+2ab...bb...2cd+2ad...dd+2bd.$

$3dd...2ad...aa...2bd+2ab...bb...2cd+2ac...cc+2bc.$

$3bb...2ab...aa...2bc+2ac...cc...2bd+2ad...dd+2cd.$

C'eſt de la même façon que l'on reſoudra cette Double Egalité en Fractions,

$$\frac{bx+ll}{ax+ll},\ \frac{cx+ll}{dx+ll}.$$

ſçavoir en égalant au quarré le produit plan-plan des quatre parties qui la compoſent, comme il vient d'être fait. C'eſt

C'eſt auſſi de la même façon, que l'on reſoudra cette autre Double Egalité,

$$\frac{bx+ll}{ax+ll},\ cx+ll.$$

ſçavoir en multipliant enſemble les trois Puiſſances qui la compoſent, & en égalant au quarré leur produit ſolide, $l^6+l^4ax+l^4bx+l^4cx+lla bxx+llacxx+llbcxx+abcx^3$, pour le côté duquel prenant $b^3+\frac{lax+lbx+lcx}{2}-\frac{aaxx-bbxx-ccxx}{8l}+\frac{abxx+acxx+bcxx}{4l}$, on trouvera pour la valeur de x, une Fraction, dont le Numerateur ſera

$$16abc+8a^3+8b^3+8c^3-8aab-8aac-8abb-8acc-8bcc-8cbb,$$

& le Dénominateur ſera

$$a^4+b^4+c^4-4ba^3-4ca^3-4ab^3-4ac^3-4bc^3-4cb^3+4bcaa+4acbb+4abcc+6aabb+6aacc+6bbcc,$$

& la Double Egalité propoſée $\frac{bx+ll}{ax+ll}$, $cx+ll$, ſe changera en deux quarrez, dont les côtez ſont tels,

$$\frac{3bb\ldots 2bc\ldots cc\ldots 2ab+2ac\ldots aa}{3aa\ldots 2ab\ldots bb\ldots 2ac+2bc\ldots cc}$$
$$\frac{3cc\ldots 2ac\ldots aa\ldots 2bc+2ab\ldots bb}{aa\ldots 2ab+bb\ldots 2ac\ldots 2bc+cc}$$

C'eſt encore de la même façon que l'on reſoudra cette Double Egalité

$$ax+ll,\ bx+ll.$$

car ſi l'on ajoûte une troiſiéme Puiſſance de même forme, comme $cx+ll$, & qu'on égale au quarré le produit ſolide de ces trois Puiſſances, $ax+ll$, $bx+ll$, $cx+ll$, comme il vient d'être fait, les deux Puiſſances propoſées deviendront quarrées.

PRO-

PROBLEME II.

Resoudre une Triple Egalité, où la lettre inconnuë a deux dimensions.

POur égaler à la fois trois Puissances au quarré, où la lettre inconnuë a deux dimensions, elles doivent être telles que la lettre inconnuë s'y rencontre par tout, en sorte que chaque Puissance n'ait que les deux premiers termes, & que le premier terme de chacune soit un nombre quarré, ou que pour le moins le produit solide des trois premiers termes soit un nombre quarré, qui servira pour égaler au quarré le produit solide des trois Puissances proposées, comme il a été fait au Problême précedent, sans qu'il soit besoin de le repeter ici davantage.

La raison pour laquelle une semblable Triple Egalité se resoud comme si la grandeur inconnuë n'y avoit qu'une dimension, est parce qu'elle se peut reduire à une autre de cette qualité, sçavoir où la quantité inconnuë n'aura qu'une dimension, comme vous avez déja vû à l'égard des Doubles Egalitez, & comme vous allez encore voir ici à l'égard de la Triple Egalité suivante,

$$xx+ax.$$
$$4xx+bx.$$
$$9xx+cx.$$

sçavoir en supposant $x \propto \frac{dm}{y}$, les deux quantitez d, m, étant indéterminées, & alors la Triple Egalité proposée se changera en celle-ci,

$$ddmm+admy.$$
$$4ddmm+bdmy.$$
$$9ddmm+cdmy.$$

où

où la quantité inconnuë y n'a qu'une dimenſion, & laquelle par conſéquent ſe peut reſoudre par les préceptes du Problême précedent.

Comme les deux quantitez d, m, ſont indéterminées, & qu'ainſi on les peut ſuppoſer telles que l'on voudra, on pourra pour avoir un calcul plus aiſé les ſuppoſer égales chacune à l'unité, en ſorte qu'on ait $x \propto \frac{1}{y}$, & alors la Triple Egalité ſera telle,

$$1+ay.$$
$$4+by.$$
$$9+cy.$$

qu'il ſera plus aiſé de reſoudre.

Avant que de mettre fin à ce Livre, nous ajoûterons ici quelques Queſtions, pour vous faire mieux comprendre cette maniere du R. P. De Billy, pour reſoudre les Triples Egalitez.

QUESTION I.

Trouver trois nombres proportionnels, en ſorte que ſi à leur produit ſolide on ajoûte le quarré de chacun, il vienne trois nombres quarrez.

CHoiſiſſez trois nombres proportionnels, comme aa, ab, bb, & mettez aax, abx, bbx, pour les trois nombres qu'on cherche, afin qu'ils ſoient proportionnels, & ſelon les conditions de la Queſtion, vous aurez ces trois Puiſſances à égaler au quarré,

$$a^3b^3x^3+a^4xx.$$
$$a^3b^3x^3+aabbxx.$$
$$a^3b^3x^3+b^4xx.$$

Diviſez la premiere par le quarré $aaxx$, la deuxiéme par le quarré $aabbxx$, & la troiſiéme par le quarré $bbxx$, pour avoir en moindres termes, ces trois autres Puiſſances à égaler au quarré,

$$ab^3x+$$

$ab^3x+aa.$
$abx+1.$
$a^3bx+bb.$

Leur produit ſolide eſt $a^5b^5x^3+a^8bbxx+a^4b^4xx+aab^6xx+ab^5x+a^3b^3x+a^5bx+aabb$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $ab+\frac{aab^3x+b^4x+a^4x}{2}+\frac{a^4b^4xx-b^8xx-a^8xx}{8ab}+\frac{a^5bxx+ab^5xx}{4}$, on trouvera $x\propto\frac{24a^7b^7-16a^9b^5-16b^9a^5-8a^3b^{11}-8b^3x^{11}+8ab^{13}+8ba^{13}}{11a^8b^8+2a^4b^{12}+2b^4a^{12}-4bba^{14}-4aab^{14}}$, & les trois nombres qu'on cherche, ſeront trois Fractions, dont le Dénominateur commun eſt le même que le précedent, & les trois Numerateurs ſont tels,

$24a^9b^7-16a^{11}b^5-16b^9a^7-8b^{11}a^5-8b^3a^{13}+8a^3b^{13}+8ba^{15}.$
$24a^8b^8-16a^{10}b^6-16b^{10}a^6-8a^4b^{12}-8b^4a^{12}+8aab^{14}+8bba^{14}.$
$24b^9a^7-16a^9b^7-16a^5b^{11}-8a^3b^{13}-8b^5a^{11}+8ab^{15}+8b^3a^{13}.$

Il eſt évident que ces trois nombres ainſi trouvez ſont proportionnels, puiſqu'ils ſont équimultiples des trois proportionnels aa, ab, bb, par le nombre $24a^7b^7-16a^9b^5-16b^9a^5-8a^3b^{11}-8b^3a^{11}+8ab^{13}+8ba^{13}$. Ainſi l'on voit que ces trois nombres ſatisfont à la premiere condition de la Queſtion, mais ils ſatisfont auſſi aux autres conditions.

Car leur produit ſolide avec le quarré du premier, fait en entiers & en moindres termes ce quarré, $24a^6b^{10}-5a^8b^8-14a^4b^{12}-12aab^{14}-8a^{10}b^6+9b^{16}+12a^{12}b^4-4bba^{14}+a^{16}$, dont le côté eſt $a^8...3b^8...2bba^6+2aab^6+3a^4b^4$.

De plus leur produit ſolide avec le quarré du ſecond, fait en entiers & en moindres termes, le quarré ſuivant $35a^8b^8-16a^{10}b^6-16b^{10}a^6-6a^4b^{12}-6b^4a^{12}+4aab^{14}+4bba^{14}+a^{16}+b^{16}$, dont le côté eſt $a^8+b^8+2bba^6+2aab^6...5a^4b^4$.

Enfin

Enfin leur produit ſolide avec le quarré du troiſiéme fait en entiers, & en moindres termes, ce quarré, $24a^{10}b^6+14b^4a^{12}-5a^8b^8-8b^{10}a^6-12bba^{14}+10a^4b^{12}+9a^{16}-4aab^{14}+b^{16}$, dont le côté eſt $b^8...3a^8...2aab^6+2bba^6+3a^4b^4$.

Si l'on ſuppoſe $a\,\text{)o}\,1$, & $b\,\text{)o}\,2$, on trouvera $x\,\text{)o}\,\frac{43472}{11025}$, & les trois nombres qu'on cherche, ſeront tels, $\frac{43472,\ 86944,\ 173888}{11025}$.

Pour égaler au quarré le produit ſolide des trois Puiſſances propoſées, on peut prendre plus facilement $ab+\frac{a^2bbx+a^4x+b^4x}{2}$, pour le côté de ce quarré, & l'on trouvera $x\,\text{)o}\,\frac{a^8+b^8-a^4b^4-2aab^6-2bba^6}{4a^5b^5}$, & les trois nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

$$\frac{a^8+b^8-a^4b^4-2aab^6-2bba^6}{4a^3b^5}.$$

$$\frac{a^8+b^8-a^4b^4-2aab^6-2bba^6}{4a^4b^4}.$$

$$\frac{a^8+b^8-a^4b^4-2aab^6-2bba^6}{4b^3a^5}.$$

qui ſatisfont aux conditions de la Queſtion : car il eſt déja très-évident qu'ils ſont proportionnels, puiſque les trois Dénominateurs ſont proportionnels, & que les trois Numerateurs ſont égaux.

Leur produit ſolide avec le quarré du premier, fait en entiers & en moindres termes, ce quarré $a^8+2bba^6-a^4b^4-2aab^6+b^8$, dont le côté eſt $a^4+aabb...b^4$.

De plus leur produit ſolide avec le quarré du ſecond, fait en entiers & en moindres termes, ce quarré

quarré $a^8 - 2bba^6 - 2bba^6 + 3a^4b^4 + b^8$, dont le côté eſt $a^4 ... aabb + b^4$.

Enfin leur produit ſolide avec le quarré du troiſiéme, fait en entiers & en moindres termes, ce quarré, $a^8 - 2bba^6 - a^4b^4 + 2aab^6 + b^8$, dont le côté eſt $a^4 ... aabb ... b^4$.

Parce que nous avons ſuppoſé $a \propto 1$, & $b \propto 2$, on trouvera $x \propto \frac{105}{118}$, & les trois nombres qu'on cherche, ſeront tels, $\frac{105,\ 210,\ 420}{118}$.

Remarque.

On peut donner aux trois nombres qu'on cherche, telle proportion que l'on voudra : comme ſi on leur veut donner la proportion des trois nombres indéterminez a, b, c, on les ſuppoſera ainſi, ax, bx, cx, afin qu'ils ſoient dans cette proportion, & ſelon les conditions de la Queſtion, l'on aura en moindres termes, ces trois Puiſſances à égaler au quarré,

$abcx + aa.$
$abcx + bb.$
$abcx + cc.$

Leur produit ſolide eſt $a^3b^3c^3x^3 + a^4bbccxx + b^4aaccxx + c^4aabbxx + ab^3c^3x + ca^3b^3x + aabbcc$, pour le côté duquel prenant $abc + \frac{aabbx + aaccx + bbccx}{1}$, on trouvera $x \propto \frac{a^4b^4 + a^4c^4 - b^4c^4 - 2aabbc^4 - 2aaccb^4 - 2bbcca^4}{4a^3b^3c^3}$, & les trois nombres qu'on cherche, ſe trouveront de cette grandeur,

$$\frac{a^4b^4 + a^4c^4 + b^4c^4 - 2aabbc^4 - 2aaccb^4 - 2bbcca^4}{4aab^3c^3}.$$

$$\frac{a^4b^4 + a^4c^4 + b^4c^4 - 2aabbc^4 - 2aaccb^4 - 2bbcca^4}{4bba^3c^3}.$$

$$\frac{a^4b^4+a^4c^4+b^4c^4-2aabbc^4-2aaccb^4-2bbcca^4}{4cca^3b^3}.$$

Si vous voulez que les trois nombres ainſi trouvez ſoient en proportion arithmetique, choiſiſſez trois nombres dans cette proportion, comme 1, 2, 3, & en ſuppoſant $a \propto 1$, $b \propto 2$, & $c \propto 3$, les trois nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{385.\ 770,\ 1155}{864}$.

QUESTION II.

Trouver trois nombres proportionnels, en ſorte que ſi à leur produit ſolide on ajoute le plan de deux quelconques, il vienne trois nombres quarrez.

CHoiſiſſez trois quarrez proportionnels, comme a^4, $aabb$, b^4, & mettez a^4x, $aabbx$, b^4x, pour les trois nombres, qu'on cherche, car ainſi ils ſeront proportionnels, & ſelon les conditions de la Queſtion, l'on aura en moindres termes, cette Triple Égalité,

$$b^4x+1.$$
$$aabbx+1.$$
$$a^4x+1.$$

qui fait connoître que cette Queſtion ſe reduit à celle-ci; *Trouver trois nombres proportionnels, en ſorte que ſi à chacun on ajoûte l'unité, chaque ſomme ſoit un nombre quarré.*

Le produit ſolide des trois Puiſſances précedentes eſt $a^6b^6x^3+a^6bbxx+aab^6xx+a^4b^4xx+a^4x+b^4x+aabb+1$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $1+\frac{a^4x+b^4x+aabbx}{2}$, on trouvera $x \propto \frac{a^8-a^4b^4+b^8-2bba^6-2aab^6}{4a^6b^6}$, & les trois nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

$$\frac{a^8-a^4b^4+b^8-2bba^6-2aab^6}{4aab^6}$$

a^8-

$$\frac{a^8 - a^4b^4 + b^8 - 2bba^6 - 2aab^6}{4a^4b^4}$$

$$\frac{a^8 - a^4b^4 + b^8 - 2bba^6 - 2aab^6}{4bba^6}.$$

Si $a \gg 1$, & $b \gg 2$, les trois nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{105,\ 420,\ 1680}{256}$.

Remarque.

Au lieu de faire proportionnels les trois nombres qu'on cherche, on peut leur donner telle proportion que l'on voudra, pourvû qu'elle ſoit ſemblable à celle de trois quarrez. Comme ſi on leur veut donner la proportion des trois quarrez indéterminez aa, bb, cc, l'on mettra aax, bbx, ccx, pour ces trois nombres, afin qu'ils ſoient dans la proportion donnée, & l'on aura en moindres termes, cette Triple Egalité,

$$\begin{array}{l} aax+1. \\ bbx+1. \\ ccx+1. \end{array}$$

qui fait connoître que cette Queſtion ſe reduit à celle-ci, *Trouver trois nombres dans la raiſon de trois quarrez donnez, en ſorte que ſi l'on ajoûte à chacun l'unité, il vienne trois nombres quarrez.*

Leur produit ſolide eſt $aabbccx^3 + aabbccx + aaccxx + bbccxx + aax + bbx + ccx + 1$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $1 + \frac{aax + bbx + ccx}{2}$, on trouvera $x \gg \frac{a^4 - 2aa^2b + b^4 - 2aacc - 2b^2cc + c^4}{4aabbcc}$, & les trois nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$\frac{a^4-2aabb+b^4-2aacc-2bbcc+c^4}{4bbcc}$$

$$\frac{a^4-2aabb+b^4-2aacc-2bbcc+c^4}{4aacc}$$

$$\frac{a^4-2aabb+b^4-2aacc-2bbcc+c^4}{4aabb}$$

Si l'on veut que ces trois nombres ſoient en proportion arithmetique, l'on cherchera par la *Queſt. 2. des Simples Egalitez*, trois quarrez dans cette même proportion, comme 1, 25, 49, dont les côtez ſont 1, 5, 7, & l'on ſuppoſera $a \propto 1$, $b \propto 5$, & $c \propto 7$, & les trois nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{429,\ 10725,\ 21021}{4900}$.

Pareillement ſi l'on veut donner aux trois nombres qu'on cherche, la proportion harmonique, on choiſira par *Queſt. 6. des Simples Egalitez*, trois nombres quarrez dans cette même proportion, comme 25, 49, 1225, dont les côtez ſont 5, 7, 35, & en ſuppoſant $a \propto 5$, $b \propto 7$, & $c \propto 35$, les trois nombres qu'on cherche, ſeront $\frac{329975^{25},\ 64675149,\ 161687825}{6002500}$.

Parce que les trois nombres trouvez en lettres, ſont entre eux dans la proportion de trois quarrez, cela fait connoître qu'on les peut rendre tous trois quarrez, ſçavoir en égalant au quarré leur Numerateur commun $a^4-2aabb+b^4-2aacc-2bbcc+c^4$, pour le côté duquel prenant $aa \ldots bb$, on trouvera $c \propto \sqrt{2aa+2bb}$. Ainſi l'on aura cette Puiſſance à égaler au quarré, $2aa+2bb$, ce qui ſera facile, parce que la ſomme 4 des unitez eſt un nombre quarré. Si donc on ſuppoſe $b \propto a+y$, on aura cette autre Puiſſance à égaler au quarré,

quarré, $4aa+4ay+2yy$, pour le côté duquel prenant $2a+\frac{dy}{m}$, en ſorte qu'on ait $c \gg 2a+\frac{dy}{m}$, on trouvera en entiers $y \gg 4dm-4mm$, & $a \gg 2mm-dd$, & par conſéquent $b \gg 4dm-2mm-2dd$, & $c \gg 4mm+2dd-4dm$, & les côtez des trois quarrez qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

$$12ddm^4+2d^5m-8dm^5\ldots 6d^4mm$$

$$d^6-6d^5m+10d^4mm-20ddm^4+24dm^5-8m^6$$
$$8dm^5+2d^5m+3d^3m^3-28ddm^4-14d^4m$$

$$d^6-6d^5m+10d^4mm-20ddm^4+24dm^5-8m^6$$
$$20d^4mm+40ddm^4-40d^3m^3-16dm^5-4d^5m$$

$$d^6-6d^5m+10d^4mm-20ddm^4+24dm^5-8m^6$$

Si l'on ſuppoſe $d \gg 1$, & $m \gg 2$, l'on trouvera $y \gg -8$, $a \gg 7$, $b \gg -1$, $c \gg 10$, & $x \gg \frac{144}{1225}$, & les trois quarrez qu'on cherche, ſont tels, $\frac{7056,\ 144,\ 14400}{1225}$, dont les côtez ſont $\frac{84,\ 12,\ 120}{35}$.

QUESTION III.

Trouver quatre nombres, tels que ſi au produit ſolide des trois premiers on ajoûte le plan de deux quelconques, il vienne par tout un nombre quarré.

Les trois nombres quarrez, $\frac{7056,\ 144,\ 14400}{1225}$, qui ont été trouvez dans la Queſtion précedente, ſont tels que ſi à leur produit ſolide on ajoûte le plan de deux quelconques, il vient trois nombres quarrez. C'eſt pourquoi on les pourra mettre pour les trois premiers des quatre que l'on cherche, & pour abreger le calcul, on mettra à leur place les lettres a, b, c,

b, c, en ſorte qu'on ait $a \gtrless \frac{7056}{1225}$, $b \gtrless \frac{144}{1225}$, & $c \gtrless \frac{14400}{1225}$, & ſi l'on met x, pour le quatrieme nombre, l'on aura en moindres termes, ces trois Puiſſances à égaler au quarré,

$$bc+x.$$
$$ac+x.$$
$$ab+x.$$

Leur produit ſolide eſt $aabbcc+aabcx+abbcx+abccx+abxx+bcxx+acxx+x^3$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $abc+\frac{ax+bx+cx}{2}$, on trouvera $x \gtrless \frac{aa-2ab+bb-2ac-2bc+cc}{4}$, & les quatre nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$$a,$$
$$b,$$
$$c,$$
$$\frac{aa-2ab+bb-2ac-2bc+cc}{4}.$$

Parce que nous avons ſuppoſé $a \gtrless \frac{7056}{1225}$, $b \gtrless \frac{144}{1225}$, & $c \gtrless \frac{14400}{1225}$, les quatre nombres qu'on cherche, ſeront tels, $\frac{5143600,\ 176400,\ 176400000,\ 7737336}{1500625}$.

QUESTION IV.

Trouver quatre nombres, tels que la difference de deux quelconques ſoit un nombre quarré.

LEs trois nombres 1873432, 2399057, 2288168, qui ont été trouvez dans nôtre *Dictionnaire Mathematique*, ſont tels que la ſomme & la difference de deux quelconques eſt un nombre quarré. D'où il ſuit que leurs quarrez 5,235,712,796,224,5,755,474,489,249,3509,747,458,624, ſont tels que la diffe-

difference de deux quelconques eſt un nombre quarré : c'eſt pourquoi on les pourra mettre pour les trois premiers des quatre que l'on cherche : & pour éviter un long calcul mettons à leur place les trois lettres a b, c, en ſorte qu'on ait a ☌ 3,509,747,458,624, b ☌ 5,235,712,796,224, & c ☌ 5,755,474,489,249, & la lettre x pour le quatriéme, & nous aurons ſeulement ces trois Puiſſances à égaler au quarré,

$$a-x.$$
$$b-x.$$
$$c-x.$$

Leur produit ſolide eſt $abc-abx-acx-bcx+axx+bxx+cxx-x^3$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $\sqrt{abc-\frac{a\,x-abx-b\,x}{2\sqrt{abc}}}$, on trouvera x ☌ $\frac{2aabc+2abbc+2abcc-aabb-aacc-bbcc}{4abc}$, & les quatre nombres qu'on cherche, ſeront en entiers de cette grandeur,

$$4aabc.$$
$$4abbc.$$
$$4abcc.$$
$$2aabc+2abbc+2abcc-aabb-aacc-bbcc.$$

Parce que nous avons ſuppoſé a ☌ 3,509,747,458,624, b ☌ 5,235,712,796,224, & c ☌ 5,755,474,489,249, les quatre nombres qu'on cherche, ſeront en moindres termes, de cette grandeur,

90,625,149,747,777,491,538,006,022,152,246,908,766,536,827,456.

135,191,281,363,639,200,897,431,392,128,411,867,249,046,881,856.

148,612,042,207,217,373,229,393,186,990,791,207,026,089,378,081.

86,275,046,283,618,622,980,141,511,907,452,799,260,427,784,192,

qui ſatisfont aux conditions de la Queſtion : car

La difference du premier & du ſecond eſt

44, 566, 131, 615, 861, 709, 359, 425, 369, 976, 164, 958, 482, 510, 054, 400,

qui a ſa Racine quarrée, 21, 110, 691, 986, 730, 730, 878, 880.

La difference du premier & du troiſiéme eſt

57, 986, 892, 459, 439, 881, 691, 387, 164, 838, 544, 298, 259, 552, 550, 625.

qui a ſa Racine quarrée 240, 804, 676, 988, 300, 793, 450, 225.

La difference du premier & du quatriéme eſt

4, 350, 103, 464, 158, 868, 557, 864, 510, 244, 794, 109, 506, 109, 043, 264.

qui a ſa Racine quarrée 65, 955, 314, 146, 464, 866, 624, 792.

La difference du ſecond & du troiſiéme eſt

13, 420, 760, 843, 578, 172, 331, 961, 794, 862, 379, 339, 777, 042, 496, 225.

qui a ſa Racine quarrée 115, 848, 007, 508, 019, 629, 003, 535.

La difference du ſecond & du quatriéme eſt

48, 916, 235, 080, 020, 577, 917, 289, 880, 220, 959, 067, 988, 619, 097, 664,

qui a ſa Racine quarrée 221, 170, 149, 613, 415, 458, 116, 392.

Et la difference du troiſiéme & du quatriéme eſt

62, 336, 995, 923, 598, 750, 249, 251, 675, 083, 338, 407, 765, 661, 593, 889.

qui a ſa Racine quarrée 249, 673, 779, 006, 924, 854, 630, 417.

Ces quatre nombres ſont encore tels, que les trois premiers ſont quarrez, dont les côtez ſont

301, 040, 113, 187, 225, 418, 864, 616.
367, 683, 670, 243, 375, 373, 236, 184.
385, 502, 324, 515, 971, 463, 978, 991.

Scolie.

Scolie.

Nous n'avons pas ici donné cette Queſtion pour ſa difficulté, mais ſeulement pour vous faire voir l'utilité de cette methode des Triples Egalitez, qui donne ici de nombres bien grands, & je ne croi pas qu'elle en puiſſe fournir de plus petits, quoi que par pluſieurs autres manieres on en puiſſe trouver de bien moindres. Car en ſe ſervant des mêmes quarrez a, b, c, & en mettant

$$xx.$$
$$xx+a.$$
$$xx+b.$$
$$xx+c.$$

pour les quatre nombres qu'on cherche, la Queſtion ſera reſoluë indéfiniment, de ſorte que ſi l'on ſuppoſe par exemple $x \propto 1$, à cauſe de $a \propto 35,097,747,458,624$, de $b \propto 5,235,712,796,224$, & de $c \propto 5,755,474,489,249$, les quatre nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

I.

3, 509, 747, 458, 625.
5, 235, 712, 796, 225.
5, 755, 474, 489, 250.

qui ſatisfont auſſi à la Queſtion: car

La difference du premier & du ſecond eſt 3509747458624, qui a ſa Racine quarrée 1873432.

La difference du premier & du troiſiéme eſt 5235712796224, qui a ſa Racine quarrée 2288168.

La difference du premier & du quatriéme eſt 5755474489249, qui a ſa Racine quarrée 2399057.

La difference du ſecond & du troiſiéme eſt 1725965337600, qui a ſa Racine quarrée 1313760.

La difference du ſecond & du quatriéme eſt 2245727030625, qui a ſa Racine quarrée 1498575.

Et la difference du troiſiéme & du quatriéme eſt 5197616930 25, qui a ſa Racine quarree 720945.

On peut trouver de nombres encore plus petits, en ſe ſervant des côtez des trois quarrez a, b, c, leſquels côtez ſont tels que la ſomme & la difference de deux quelconques eſt un nombre quarré, ce qui fait que ſi à ces trois nombres on fait ſucceder un quatriéme, qui ſoit égal à leur ſomme, on aura les quatre nombres qu'on cherche, ſçavoir

1873432.
2288168.
2399057.
6560657.

qui ſatisfont aux conditions de la Queſtion: car

La difference du premier & du ſecond eſt 414736, dont la Racine quarrée eſt 644.

La difference du premier & du troiſiéme eſt 525625, dont la Racine quarrée eſt 725.

La difference du premier & du quatriéme eſt 4687225, dont la Racine quarrée eſt 2165.

La difference du ſecond & du troiſiéme eſt 110889, dont la Racine quarrée eſt 333.

La difference du ſecond & du quatriéme eſt 4272489, dont la Racine quarrée eſt 2067.

Et la difference du troiſiéme & du quatriéme eſt 4161600, dont la Racine quarrée eſt 2040.

Mais pour avoir une ſolution indéfinie, ſervez-vous des trois nombres indéfinis, que nous avons publié depuis environ douze ou treize ans, & dont nous avons encore enſeigné l'invention dans nôtre *Dictionnaire Mathematique*, & alors les quatre nombres qu'on cherche, ſeront tels,

$6aab^{18}+24a^6b^{14}-92a^{10}b^{10}+24a^{14}b^6+6a^{18}bb.$
$a^{20}+21a^{16}b^4-6a^{12}b^8-6a^8b^{12}+21a^4b^{16}+b^{20}.$
$10aab^{18}-24a^6b^{14}+60a^{10}b^{10}-24a^{14}b^6+10a^{18}bb.$

$a^{20}+$

$a^{20}+16a^{18}bb+21a^{16}b^4-6a^{12}b^8-32a^{10}b^{10}-6a^8b^{12}+21a^4b^{16}+16aab^{18}+b^{20}$,

qui ſatisfont auſſi à la Queſtion; car

La difference du premier & du ſecond eſt

$a^{20}-6a^{18}bb+21a^{16}b^4-24a^{14}b^6-6a^{12}b^8+92a^{10}b^{10}-6a^8b^{12}-24a^6b^{14}+21a^4b^{16}-6aab^{18}+b^{20}$,

dont la Racine quarrée eſt $a^{10}...3a^8bb+6a^6b^4+6a^4b^6-3aab^8+b^{10}$.

La difference du ſecond & du troiſiéme eſt

$a^{20}-10a^{18}bb+21a^{16}b^4+24a^{14}b^6-6a^{12}b^8-60a^{10}b^{10}-6a^8b^{12}+24a^6b^{14}+21a^4b^{16}-10aab^{18}+b^{20}$,

dont la Racine quarrée eſt $a^{10}...5a^8bb...2a^6b^4+2a^4b^6+5aab^8...b^{10}$.

La difference du premier & du troiſiéme eſt

$4aab^{18}-48a^6b^{14}+152a^{10}b^{10}-48a^{14}b^6+4a^{18}bb$,

dont la Racine quarrée eſt $2ab^9...12a^5b^5+2ba^9$.

La difference du premier & du quatriéme eſt

$a^{20}+10a^{18}bb+21a^{16}b^4-24a^{14}b^6-6a^{12}b^8+60a^{10}b^{10}-6a^8b^{12}-24a^6b^{14}+21a^4b^{16}+10aab^{18}+b^{20}$,

dont la Racine quarrée eſt $a^{10}+5a^8bb...2a^6b^4...2a^4b^6+5aab^8+b^{10}$.

La difference du troiſiéme & du quatriéme eſt

$a^{20}+6a^{18}bb+21a^{16}b^4+24a^{14}b^6-6a^{12}b^8-92a^{10}b^{10}-6a^8b^{12}+24a^6b^{14}+21a^4b^{16}+b^{20}$,

dont la Racine quarrée eſt $a^{10}+3a^8bb+6a^6b^4...6a^4b^6...3aab^8...b^{10}$.

Et la difference du ſecond & du quatriéme eſt

$16aab^{18}-32a^{10}b^{10}+16a^{18}bb$,

dont la Racine quarrée eſt $4ab^9...4ba^9$.

Si l'on ſuppoſe $a \gg 1$, & $b \gg 2$, ou $a \gg 2$, & $b \gg 1$, les quatre nombres qu'on cherche, ſe trouveront les mêmes qu'auparavant: mais ſi l'on ſuppoſe $a \gg 1$, & $b \gg 10$, ou $a \gg 10$, & $b \gg 1$, les quatre nombres qu'on cherche, ſeront de cette grandeur,

6, 002,

6, 002, 399, 080, 024, 000, 600,
100, 209, 993, 999, 400, 210, 001,
9, 997, 600, 599, 976, 001, 000,
116, 209, 993, 679, 400, 211, 601,

qui ſatisfont aux conditions de la Queſtion: car

La difference du premier & du ſecond eſt 9, 420, 759, 491, 937, 620, 401, dont la Racine quarrée eſt 9, 706, 059, 701.

La difference du premier & du troiſiéme eſt, 3, 995, 291, 5[illegible]000, 400, dont la Racine quarrée eſt 199, 880, 002.

La difference du premier & du quatriéme eſt 110, 207, 594, 599, 376, 211, 001, dont la Racine quarrée eſt 10, 497, 980, 591.

La difference du ſecond & du troiſiéme eſt 90, 212, 393, 399, 424, 209, 001, dont la Racine quarrée eſt 9, 498, 020, 499.

La difference du ſecond & du quatriéme eſt 15, 999, 999, 680, 000, 001, 600, dont la Racine quarrée eſt 3, 999, 999, 960.

Et la difference du troiſiéme & du quatriéme eſt 106, 212, 393, 079, 424, 210, 601, dont la Racine quarrée eſt 10305939699.

On peut faire que la ſomme des quatre nombres qu'on cherche, ſoit égale à un nombre donné, comme nous avons fait voir dans nôtre *Traité des Lignes du premier genre*, ſans qu'il ſoit beſoin d'en parler davantage.

Fin de la ſeconde Partie.

VA1 1517647
608821(2
SBN